Educación matemática.

De Felix Klein a Hyman Bass.

(*Versión Preliminar*)

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío.*

Abstract

The main purpose of this article is to present succinctly, however critically, the state of mathematics education from last part of XIX century to nowadays. We understand by mathematics education here, the mathematical cultural heritage we have been teaching and learning through the past generations from elementary to college math instruction. We'll analyze the effect caused for the rapid growing of the mathematical knowledge in the past century on mathematics education. We are trying to understand and explain the great separation between the topics we are teaching, and today mathematics, mathematics on the headlines of the news. We look for new approaches to manage this gap, suggesting radical changes in the curriculum for elementary and high school mathematics.

Felix Klein and Hyman Bass are shown here as milestones figures along the development of mathematical education in the past century. Both of them were ICMI (*International Commission on Mathematical Instruction*) presidents, the former in 1908 and the latter finished his period in 2006.

RESUMEN

El propósito de esta exposición es examinar en forma sucinta, pero críticamente el estado de la educación matemática desde fines del siglo XIX hasta nuestros días. Entendemos aquí por educación matemática, el acervo cognitivo que el hombre adquiere a lo largo de su educación, entre el preescolar y la universidad, en lo relativo a las matemáticas. Analizaremos el efecto causado por los vertiginosos desarrollos matemáticos en la pasada centuria, en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el seno de las instituciones educativas. Se busca desentrañar las causas de la gran separación que existe entre lo que se enseña y lo que se investiga en matemáticas; entre lo que constituye un currículo en la enseñanza básica y lo que debería enseñarse en matemáticas para estrechar la brecha entre lo que enseñamos y lo que es noticia en el mundo de las matemáticas.

Los nombres de Félix Klein, el gran matemático de la escuela de Gotinga y un gran educador, y de Hyman Bass, el pasado presidente de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), están aquí reseñados, como hitos históricos que representan dos épocas. Una, la del florecimiento mayor de las matemáticas en Europa y la otra que vivimos, caracterizada por su gran complejidad en lo que a educación se refiere.

1. – Introducción.

¿Cómo podemos probar que e y π son trascendentes?, es una de las preguntas que Felix Klein responde, en un curso de actualización para profesores de colegios de bachillerato de la Asociación para el Avance de la Educación Matemática y de las Ciencias Naturales de Alemania. Estamos hablando de un cursillo que el "gran Felix Klein", matemático de talla mundial, dicta a los docentes de educación media en los años de 1890[1]. Esta serie de charlas se realizan en los claustros de la que llegaría a ser la *meca mundial de las matemáticas*, la Universidad de Gotinga. Hay que destacar que Klein fue un matemático muy comprometido con la educación matemática, faceta, no muy conocida, de la vida intelectual del gran matemático alemán.

La trascendencia[2] de π fue establecida por Ferdinand Lindemann en 1882. No hay duda de que este logro fue gigantesco, si se tiene en cuenta que, al determinar la trascendencia de π, queda resuelto negativamente, un problema propuesto desde la antigüedad griega: la *cuadratura del círculo.* Klein, a los pocos años de este hecho, ya está ventilando este tema entre los profesores de educación secundaria. Con esto, quiero poner de presente, que a fines del siglo XIX, los descubrimientos, o los avances de las matemáticas, llegan a los educadores casi al tiempo en que se producen, permitiendo así su difusión entre sus educandos y de allí pasen, a formar parte de la cultura social, máximo objetivo que, cualquier sistema educativo persigue.

Mencionemos también que, Tolstói, a mediados del siglo XIX, en una parte del clásico de la literatura universal, *Guerra y Paz,* propone buscar las leyes que gobiernan la historia de la humanidad, a través de una teoría basada, nada menos que, en el cálculo integral, una disciplina inventada por Newton y Leibniz en el siglo XVII, y que en el tiempo, cuando escribe Tolstói, está en proceso de desarrollo y consolidación en Alemania y Francia[3]. Sin entrar en detalles técnicos, la idea de Tolstói es, usar el recurso de los infinitesimales para interpretar los episodios históricos, y así, a través de ellos, llegar a las leyes que gobiernan, el aparentemente caprichoso, comportamiento humano a lo largo de la historia[4]. Aquí, como en el caso de Klein, las matemáticas que se estilan en la época, son las que usa Tolstói para su especulación histórico-literaria.

Lo mencionado en las líneas anteriores, contrasta con la época en que vivimos. No obstante tener la tecnología de punta y los medios de comunicación a nuestro alcance, con las mejores condiciones de vida que el progreso nos depara y aun así, los docentes, vivimos desconectados de lo que ocurre en las fronteras de las matemáticas. Si así estamos los docentes, es de esperarse, que el ciudadano común y corriente, permanezca en situación de mayor atraso.

---

[1] KLEIN, F. et al. *Famous Problems of Elementary Geomettry and other Monographs.* Chelsea Publishing Company. New York. Second Edition. 1980.

[2] Un número real es algebraico si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico, porque es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Sin embargo, π no está en esa categoría. Números como π se llaman trascendentes o no algebraicos.

[3] Ver el interesante artículo: AHEARN, S. T. *Tolstoy's Integration Metaphor from War and Peace*. : American Mathematical Monthly. August-September 2005.

[4] Un poco más sobre este tema, se encuentra visitando: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/cronicaXV.pdf.

¿Cuáles han sido las causas que han propiciado esta separación abismal, entre lo que enseñamos, y lo que ahora es noticia mundial en matemáticas?

¿Qué hacer para cerrar la brecha entre lo que el profesor enseña y aquello que actualmente es motivo de investigación en las matemáticas?

¿Es éste, un problema local, o tiene un carácter universal?

Analizar estas preguntas y reflexionar en torno a ellas, es el objetivo central de esta exposición.

Antes de abordar el tema digamos algo sobre Felix Klein y sobre Hyman Bass.

Felix Klein (1849-1925) fue un influyente matemático en los círculos intelectuales de fines del siglo XIX y comienzos del siglo pasado, no sólo por ser una de las luminarias de la *Escuela matemática de Gotinga,* sino también, por sus valiosas contribuciones a muchas áreas de las matemáticas, entre ellas a la educación matemática[5]. El *Programa de Erlangen*, por ejemplo, es una muestra de su capacidad universalista, que permitió, usar el álgebra moderna (más específicamente la teoría de grupos) como factor integrador de las diferentes formas de ver, la geometría de su tiempo.

El título de esta presentación está asociado al nombre de Hyman Bass, porque este prestigioso y creativo matemático de la Universidad de Michigan, ha mostrado notable interés por la educación matemática de nuestro tiempo. En su artículo *Mathematics, mathematicians and mathematics education*[6], nos hace partícipes de sus experiencias en la investigación y en la práctica educativa a nivel elemental, no obstante que, su trayectoria docente e investigativa ha estado relacionada con esferas avanzadas de las matemáticas. Hyman Bass, fue presidente de la *American Mathematical Society*, y también presidente hasta 2006, de la Comisión Internacional de Instrucción matemática (*International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI)). La ICMI se inició con el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Roma en 1908, por sugerencia de David E. Smith, el historiador americano de las matemáticas. Es interesante anotar que el primer presidente de esta centenaria institución fue precisamente Felix Klein.

2. Matemáticas y Educación matemática

Al estudiar la etimología de la palabra "matemáticas", uno descubre aspectos interesantes que bien vale la pena hacer conocer por cuanto ilustran la importancia que la enseñanza de las matemáticas ha tenido a lo largo de la historia, al menos desde la época clásica griega. Jean Etienne Montucla (1725-1799), el primer historiador de las matemáticas en épocas modernas, menciona que uno de los significados de la palabra "matemáticas", fue "conocimiento general".

[5] Felix Klein escribió un libro muy popular en su tiempo: *Matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado*, aun en imprenta publicado por Dover de Nueva York.

[6] BASS, H. *Mathematics, mathematicians and mathematics Education*. Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 42, No. 4. October 2005.

Según Bochner[7] el significado original de la palabra griega "matemáticas", fue: "algo que ha sido aprendido o entendido" o mejor "conocimiento adquirido". Por extensión, se obtiene un significado como: "conocimiento adquirible por aprendizaje". La palabra griega original viene en plural matemáticas (*mathematiké*). La singularización (*matemática)* en idiomas como, español y francés viene del tiempo de la Escuela Bourbaki (alrededor de la década de 1940) a la que nos referiremos más adelante.

Lo anterior nos muestra cómo, desde su orígenes, "*las matemáticas*" son enseñanza y desde luego aprendizaje. De allí se sigue que la educación matemática es connatural con las matemáticas, y consecuentemente, los temas relacionados con la innovación y puesta al día de la enseñanza de las mismas, son muy importantes para las matemáticas mismas. Mucho se ha hablado, escrito, y se siguen elaborando tesis de grado en los doctorados, sobre, *el cómo* enseñar las matemáticas. Sin embargo poco conozco sobre materiales, que resalten y cuestionen, el *qué* se está enseñando en las escuelas, colegios y universidades. La tesis central de este trabajo reposa esencialmente en el cuestionamiento de los contenidos matemáticos que se enseñan en los niveles mencionados. Se quiere poner de relieve, además, la necesidad de poner a tono esos contenidos con la época en que vivimos, donde la tecnología se convirtió en parte esencial de la vida diaria. Para comprender la tecnología y las complejas relaciones de la sociedad de hoy se requieren matemáticas diferentes a las que se enseñaban hace cien años o más.

Mirando el contenido del Texto de Algebra de Chrystal[8], que sirvió de guía a las escuelas inglesas y americanas de fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX, y comparando con los textos de álgebra actuales, uno observa la degradación que han sufrido los contenidos programáticos de esta parte específica de las matemáticas. Hoy enseñamos menos álgebra, que la que se enseñaba hace cien años.

Quien desconoce la historia está condenado a repetirla"*,* dice un sabio adagio clásico. Conocer la historia de las matemáticas y de su enseñanza es un aspecto interesante y enriquecedor para los profesores, y para los interesados en la enseñanza de las matemáticas. Conocer la historia nos ayuda a buscar alternativas inteligentes, que en el pasado sirvieron para revolucionar (para bien), la educación en países desarrollados. El caso más notable, con relación a la educación matemática, es la revolución educativa que se produjo en Alemania a comienzos del siglo XIX. Después de haber perdido la guerra frente a Francia, el emperador Federico Guillermo III, consideró que lo más valioso que había sobrevivido a la guerra era la gente y que para reconstruir al país había que formar bien a la juventud. El gran acierto del emperador fue nombrar como ministro de educación a Guillermo von Humboldt (1767-1835), hermano de Alejandro, el amigo de nuestro prócer, el sabio Caldas. Guillermo fue filósofo, antropólogo, lingüista y al igual que su hermano Alejando, se formó en las aulas de la Universidad de Gotinga.

---

[7] BOCHNER, S. *The Role of Mathematics in the Rise of Science*. Princeton University Press. New Jersey. 1981.

[8] CHRYSTAL, G. *Algebra. An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges. Two Volumen.* 7th. Edition. Chelsea. New York. 1964

Guillermo von Humboldt, como personaje influyente, tuvo bajo su responsabilidad la reorganización del sistema de educación pública en Prusia[9]. Entre los aspectos a destacar figuran: la creación de normales para la formación de profesores, la creación de un sistema nacional de escuelas y colegios, con la característica de que en su programación aparecía una carga horaria de seis horas semanales de matemáticas. Durante su administración se creó la Universidad de Berlín y se estableció una clara filosofía en el contexto universitario: *libertad* y *universalidad*. La Universidad de Berlín, inicialmente bautizada como *Friedrich Wilhelm Universität,* lleva hoy el nombre de Universidad von Humboldt, en honor a quien fue el gestor intelectual del nuevo concepto de universidad. Fue en esta institución, a comienzos del siglo XIX que se acuñó el término, *Ph. D.* (del latín *Philosophiae Doctor=Docente en filosofía*) para designar el título máximo que otorgaba la universidad en las áreas de ciencias y humanidades.

La Universidad de Gotinga jugó un papel importante en este proceso de cambio, por cuanto que en los tiempos siguientes a la reestructuración educativa, la institución dedicó su mayor esfuerzo a la formación de profesores e investigadores. Esa tradición se mantuvo, hasta llegar a ser en los albores del siglo XX, la meca de las matemáticas, con Klein, Hilbert y otras luminarias más. La tendencia moderna en el concepto de *universidad* busca emular la calidad y el nivel que se impuso en la época en que se entronizó la *ilustración* en Alemania. La ilustración, como bien se sabe fue un movimiento socio-cultural que tocó a Europa y culminó con la Revolución Francesa en el siglo XVIII.

3 – La separación entre lo que se enseña y lo que se investiga.

La educación entre nosotros, parece estar en crisis permanente desde comienzos del siglo XX. Esta crisis se ve reflejada, aún en letras de canciones, como *Cambalache*, aquel tango de Enrique Santos Discépolo, uno de cuyos versos afirma "… *es lo mismo un burro que un gran profesor*", o para citar el caso de Colombia, en una frase de nuestros abuelos, al referirse a personas de poco futuro: "*Si no sirve para nada, es posible que sirva para maestro*". En este contexto, la educación se ha mirado como actividad de tercera clase.

El comienzo del siglo pasado, fue época de gran dinamismo en la creación matemática. Dinamismo impuesto gracias, sobre todo, a corrientes intelectuales bien definidas, originadas en Alemania, Francia, Gran Bretaña y en parte en la tradición de la escuela matemática rusa iniciada desde el tiempo en que Euler dinamizó la producción matemática en San Petersburgo. Fue tal el avance investigativo por esa época, que consecuencia de ello, hoy podemos apreciar retrospectivamente, la eclosión de muchas áreas nuevas, entre ellas: la topología, el álgebra moderna, el análisis funcional, la teoría de medida, el análisis complejo, la lógica matemática, el análisis en sus ramas abstractas, la teoría de probabilidades y especializaciones de estas áreas que conducen, a nuevas ramificaciones. En virtud a este rápido desarrollo, la educación matemática, encasillada en la tradición de los cursos básicos de aritmética, algebra elemental, geometría y cálculo infinitesimal, no pudo asimilar los cambios vertiginosos del desarrollo matemático y se quedó definitivamente atrás. Este rezago es de tal magnitud, que, de no cambiar nuestro enfoque

[9] Prusia era el nombre de la confederación de varios estados alemanes desde la época de Federico II, el Grande en el siglo XVIII.

en aras de superar este gran vacío, más adelante será imposible de superar. A no ser que, pensemos en alternativas revolucionarias, en cuanto a la concepción filosófica de la educación en general, y no únicamente en el aspecto matemático.

Mi impresión es que, estamos impartiendo una enseñanza para domeñar unas matemáticas y unos problemas científicos, de épocas pasadas. Los problemas de las nuevas generaciones, son problemas de otro alcance y profundidad, muy diferentes a los que se ventilaba en el tiempo de Euclides o en las generaciones que siguieron a la influencia de Al-Khowarizmi, o a los tiempos posteriores a la creación del álgebra renacentista.

Con los estrechos recursos de la aritmética, el álgebra elemental, la geometría y el cálculo infinitesimal que se enseña en el bachillerato, es imposible llegar a comprender los temas centrales de actualidad matemática mundial, entre ellos: la solución de la Conjetura de Poincaré, la noticia matemática del año pasado, o quizá, la noticia matemática del siglo XXI, o el *mapeo* de E_8 que fue la noticia del mes de marzo de 2007. Para comprender el significado y la importancia de estos logros matemáticos, se hace menester, conocer un poco el lenguaje de la topología y de la geometría diferencial, en el primer caso y en el segundo, un mediano conocimiento de la clasificación de las álgebras de Lie. Estos temas por exóticos que parezcan, pueden estar al alcance de la comprensión del profesor de bachillerato, siempre que, en las universidades donde se preparen, se cambien los contenidos matemáticos de los programas, y éstos se orienten de forma tal, que, posibiliten el aprendizaje de los mismos. Estos temas, aunque son relativamente nuevos, no dejan de ser fascinantes.

Resultados matemáticos, de gran interés y profundidad, a los que se llegó en matemáticas el siglo pasado, como fueron los teoremas de *incompletitud de Gödel*, ni siquiera se nombran. Las teorías que originaron los trabajos de Georg Cantor, no se discuten y se ignoran, como si no existieran. La teoría de conjuntos, la acogimos sin mayor discusión y ni siquiera sabemos si su introducción en las matemáticas, hace de ellas, un cuerpo de conocimiento más riguroso.

Hay muchas razones que muestran la separación grande, entre lo que aprendemos durante la escolaridad y lo que se produce en matemáticas. Tanto en las matemáticas puras, como en las llamadas matemáticas aplicadas, hay áreas fundamentales, de las que nunca oímos hablar, ni en el bachillerato, ni en la universidad. Como docentes de matemáticas, es nuestro deber, mostrar al estudiante, el basamento matemático que está detrás, por ejemplo, de la moderna tecnología, o en los alcances de los logros matemáticos de los últimos tiempos. ¿Cómo hacer, por ejemplo, entender a nuestros discípulos las matemáticas que reposan en la base de la grabación digital, o en la encriptación bancaria, o aun en la telefonía celular? Debemos introducir, así sea en forma elemental, la idea de series de Fourier, y hablar de *waveletes*, para poder entender cómo, la técnica actual se fundamenta en unas matemáticas reales, que deben introducirse en la educación básica.[10]

4 – Para cerrar la brecha.

[10] Algo más sobre estos temas puede verse en una corta nota del autor, en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Cronica%20XIX.pdf.

El problema de la educación matemática está inmerso en la problemática educativa. La educación matemática tiene un peso específico alto en la formación cultural del hombre como ser social. Las matemáticas en la cultura occidental han estado ligadas a la educación, desde los albores de las primeras civilizaciones: la babilonia y la egipcia. Al repasar la historia de la filosofía y de las matemáticas uno se encuentra que estas dos áreas del conocimiento, han venido aparejadas con la educación. En los primeros tiempos de la cultura griega, la filosofía y las matemáticas eran cultivadas simultáneamente. Filósofos como Zenón, Platón y Aristóteles, para citar solamente tres, contribuyeron al desarrollo de las matemáticas. En tiempos más recientes, Descartes y Leibniz hicieron lo propio desde sus respectivos ángulos. En la actualidad, los matemáticos están contribuyendo al desarrollo de la filosofía, como se aprecia al mirar la galería de galardonados con el *Premio Schock* en lógica y filosofía, de la Academia Sueca de Ciencias en las últimas entregas. Solomon Feferman y Jaakko Hintikka, premiados en 2003 y 2005 respectivamente, son ambos matemáticos[11].

Como dijimos en el apartado anterior el currículo en la educación matemática actual es estrecho y anacrónico. Vivimos una época de cambios radicales, donde la tecnología nos abruma en todos los aspectos, y si no logramos entrar en la tónica de sus grandes posibilidades, estaremos en la situación del que pregunta: *¿Quién se ha llevado mi queso*?[12], al darse cuenta de que las oportunidades se están escapando de sus manos, al no ponerse a tono, con los cambios vertiginosos por los que atraviesa la humanidad.

Para cerrar la brecha necesitamos de la tecnología de punta y ésta tiene en su parte frontal al computador, la herramienta que ahora está al alcance de todo estudiante, inclusive del estudiante de prekinder. La situación que estamos viviendo por estos años es similar a aquella, cuando la aritmética pasó del ábaco a los algoritmos, dejando al primero en estado de obsolescencia. Con esto estamos sugiriendo revisar la enseñanza y los contenidos de las matemáticas básicas buscando enfoques novedosos que involucren el recurso del computador y de las nuevas tecnologías. Parece una regresión pensar que, estamos volviendo al ábaco, ya que, en esencia el computador es un ábaco sofisticado, pero producto, irónicamente, de las matemáticas algorítmicas. Esta aparente regresión. no debe alarmarnos: es simplemente, producto del movimiento pendular de la cultura, que vuelve a recorrer senderos pasados, aunque en un estrato superior.

Estamos convencidos que nadie usa tablas de logaritmos, por ejemplo, y por eso, sería superflua la enseñanza de su manejo. También es superfluo e innecesario enseñar, en la forma tradicional la aritmética, cuando tenemos una calculadora al lado. Aún más, ¿quién se pone a hacer las cuentas del pago del mercado, cuando es la registradora, con todo detalle, precisión e impresión a su alcance, la que lo hace? Las registradoras no se equivocan. Los errores serán de otro tipo, pero no aritméticos.

---

[11] Para información relativa a estos premios visitar: http://www.kva.se/KVA_Root/eng/awards/international/schock/index.asp

[12] JOHNSON, Spencer, MD. *¿Quién se ha llevado mi queso*? *Como adaptarnos a un mundo en constante cambio.* Editorial Urano. Barcelona. 2000.

Entonces, ¿Es necesario enseñar aritmética de rutina, aquella que los clásicos griegos, llamaban *logística*? Creo que no. Aquí también hay que hacer otra regresión. En este caso, una regresión de más de dos mil años. Considero que debemos retomar la *Aritmética* clásica, la de Pitágoras, Platón, Aristóteles y Euclides, es decir, volver a la *Teoría de Números.* El sentido de la palabra *aritmética*, en sus puros orígenes, era el estudio de los números y sus propiedades. La parte operativa y rutinaria, *la logística*, fue considerada en la época clásica griega, disciplina de bajo perfil, y sin mayor interés para el intelecto. Creo que es a la aritmética clásica a la que debemos apuntar. Porque la teoría de números es la que ha enriquecido la historia de las matemáticas y es allí, donde reposa el maravilloso encanto de los números y sus propiedades. Las rutinas aburren, a estudiantes grandes y pequeños, y a lo largo de sus estudios, van formando reacciones adversas, a la comprensión y apego, a las matemáticas en general.

El tiempo empleado en insistir sobre las rutinas, de las cuatro operaciones básicas, se puede aprovechar, primero, en explicar el por qué de tales rutinas o procedimientos, si se quiere, y segundo, cómo plantear y resolver problemas. Y eso si, es matemáticas, claro, y filosofía también. Los pitagóricos elaboraban tablas de sumar y multiplicar, las que proveían a los comerciantes con las instrucciones para su manejo. Sin embargo, no enseñaban cómo hacerlas. En este conocimiento exclusivo, basaban su poder e influencia. En nuestros días casi siempre hacemos eso, enseñamos los algoritmos, pero no explicamos la razón de su existencia. Este conocimiento creo que es más importante y provechoso para el estudiante, que el aprendizaje de las tediosas rutinas. Las propiedades de los números se han venido descubriendo desde los tiempos de Hammurabi en Babilonia y a lo largo de más de cuatro mil años, por matemáticos tan importantes como Aristóteles, Platón, Euclides, Galileo, Fermat, Leibniz, Euler, Gauss, Riemann, y en tiempos inmediatos por Terence Tao, ganador de la Medalla Fields, en el *Congreso Internacional de Matemáticos,* realizado el pasado año en Madrid.

Dado lo controvertible del tema, sería sano, abrir una discusión amplia, donde haya la posibilidad de acopiar mejores argumentos, que enriquezcan la discusión. De todas formas el debate en torno a la educación, apenas empieza y hay que reconocer, que quienes saldrán aquí ganando, serán las nuevas generaciones de estudiantes, para quienes, la dura jornada del aprendizaje de las matemáticas, será, en un futuro, más provechosa y menos dolorosa de lo que es ahora.

5 – Una mirada panorámica a la educación matemática global.

Quiero referirme sólo superficialmente a los casos de Europa, Estados Unidos y Colombia, por ser los que medianamente conozco. En cuanto a Europa me referiré a la escuela Bourbaki que dejo varias secuelas en las matemáticas que hoy tratamos, empezando por el cambio de nombre. Mientras clásicamente se hablaba genéricamente de las matemáticas, después del ascenso de la Escuela Bourbaki terminamos diciendo *la matemática.* Este término pasó a nuestro vocabulario con un comportamiento un poco extraño, por cuanto con frecuencia el mismo autor usa las dos palabras indistintamente, sin detenerse a pensar que las dos tienen pesos específicos muy diferentes, por cuanto detrás de los dos términos hay dos filosofías también diferentes.

Tomar conciencia de este desequilibrio entre lo que enseñamos y lo que está en el frente de la ciencia, no es nada nuevo. Desde los años treintas del siglo pasado la Escuela Bourbaki, buscaba en su enfoque filosófico remediar precisamente ese mal. André Weil describe en sus memorias[13], cómo, su preocupación al respecto, fue compartida por sus colegas, Henri Cartan, Jean Dieudonné, Charles Pisot, Claude Chevalley y Jean Delsarte, todos egresados de la Escuela Normal Superior de Paris. Este grupo de profesores franceses, se vendría a constituir en el núcleo inicial de la muy reconocida *Escuela Bourbaki*, que tendría cuestionada influencia en la educación matemática de occidente.

La idea inicial del grupo estaba orientada a reescribir los textos de matemáticas para el nivel universitario que permitieran dar las bases para el gran salto hacia unas matemáticas básicas que estuvieran a tono con los grandes avances de las nuevas matemáticas desarrolladas hasta esa época. Se buscaba incluir en el pensum universitario la teoría de conjuntos, en parte axiomatizada por ellos y por Ernst Zermelo y Fraenkel, como también unos fundamentos básicos que permitieran la introducción del núcleo central de las matemáticas modernas. Obras de análisis matemático como la de Edouard Goursat, apropiadas para los estudiantes universitarios de fines del siglo XIX, requerían ser reemplazadas por textos de mayor alcance y profundidad, que permitieran dar cabida a las nuevas tendencias que incluían: topología, teoría de medida, algebra, espacios topológicos y temas no estudiados en los textos en circulación por esos años.

La Escuela Bourbaki buscaba además de la presentación de materiales nuevos en el pensum, un pretendido rigor desde las esferas más elementales de las matemáticas. Este rigor en la presentación de los temas, fue una característica central de su enfoque. Los conceptos de, estructura y de homomorfismo, entraron a formar parte del argot de las matemáticas desde que empezaron a circular los volúmenes de los *Elementos de Matemática* de Bourbaki. No hay duda que la influencia de la Escuela Bourbaki fue muy sentida en el mundo de la educación matemática, a tal punto que la aparición del movimiento de la *matemática moderna*, despertó reacciones encontradas en todas las esferas relacionadas con la educación matemática, como lo veremos adelante.

Al igual que a Colombia, la *matemática moderna,* tocó a Estados Unidos con consecuencias un tanto polémicas. Esta corriente, estuvo liderada por la escuela francesa Bourbaki, y por la aclimatación de ésta en la "Nueva Matemática" en Estados Unidos, a través del *SMSG* (School Mathematics Study Group). En Colombia recibimos *la matemática moderna* directamente de Francia y también a través de los llamados *cuerpos de paz*, en tiempos de Kennedy. El efecto de estas tendencias, sin ser catastrófico, como fue en Estados Unidos, no nos dejó mayor cosa, ni para bien ni para mal, creo, salvo por un detalle, un cambio de denominación: antes decíamos *matemáticas,* ahora muchos dicen: *matemática*. La singularización del término por la escuela Bourbaki fue intencional, pues su concepción filosófica implicaba la creación de un solo cuerpo sólido de conocimiento matemático, basado en la teoría de conjuntos. Es decir, una sola disciplina, *la matemática*, cuyo contenido aparecería en la obra proyectada, *Elementos de Matemática*.[14]

---

[13] WEIL, A. *The Apprenticeship of a Mathematician*. Birkhäuser Verlag. Basel-Boston-Berlin. 1991.
[14] BOREL, A. *Twenty Five Years with Nicolas Bourbaki, 1943-1973.* Notices of the American Mathematical Society. Vol. 45, No. 3. Pág. 374. March 1998.

La llegada de la *matemática moderna* a Colombia, coincidió con un incremento masivo de la educación media y universitaria. Particularmente las facultades de educación se multiplicaron a tal punto que hasta las universidades privadas incluyeron en su oferta académica, la carrera de ciencias de la educación con especialidad en matemáticas. Con esta explosión de licenciados en matemáticas, la *matemática moderna* entró a todos los rincones del país y claro, allí nos quedamos, como puede constatarse en los textos de matemáticas que estudian nuestros estudiantes de bachillerato.

La llamada matemática moderna trajo como principal elemento el método axiomático, dentro de un marco formalista, el que se trató de imponer desde los primeros años de escolaridad, con consecuencias catastróficas en el ámbito educativo de Estados Unidos; a tal punto que por los años setentas del siglo pasado apareció un movimiento de retorno a lo básico de las matemáticas y un ataque a la metodología de la enseñanza de las matemáticas y a sus correspondientes curricula. Matemáticos importantes, como Morris Kline de la Universidad de Nueva York criticaron duramente la implementación de la nueva matemática en las escuelas y colegios de Norte América a través de sus libros[15] y de entrevistas en la radio y la televisión. Este movimiento condujo a la enseñanza de las matemáticas a una degradación, cuya consecuencia fue una nueva reacción, en este caso, no de los matemáticos profesionales, sino del *National Council of Teachers of Mathematics*, la organización que agrupa a los profesores de matemáticas de la enseñanza básica. Esto ocurre en los años de 1980, con la aparición de unos principios y estándares mínimos para la educación matemática, los que marcan un hito en la historia de la educación en ese país, donde la educación ha tenido autonomía local para establecer los curricula de enseñanza.

Esos principios los podemos expresar en las siguientes líneas.[16]

Equidad. Por equidad aquí se entiende la excelencia en la educación con altos objetivos y con apoyo general para todos los estudiantes.

Currículo. Un currículo debe ser coherente, encaminado a mostrar partes importantes de las matemáticas, que serán bien distribuidas a lo largo de los cursos básicos.

Enseñanza. La enseñanza efectiva requiere entender lo que el estudiante sabe y lo que necesita aprender y como consecuencia de esta apreciación, con el apoyo institucional, lograr sobrepasar los retos que implica este aprendizaje efectivo.

Aprendizaje. El estudiante debe aprender matemáticas entendiendo. Este aprendizaje debería basarse en la construcción de nuevo conocimiento con el soporte de la experiencia y de los conocimientos ya adquiridos.

---

[15] Ver por ejemplo:
KLINE, M. *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math.* Random House Inc. New York. 1974.
KLINE, M. *Why the professor can't teach: Mathematics and the dilemma of university education*. St. Martin's Press. New York. 1977.

[16] NCTM. *Principles and Standards for School Mathematics*. Ver: http://standards.nctm.org/document/chapter2/index.htm

Evaluación. La evaluación debe servir de suporte para el aprendizaje de partes importante de las matemáticas y acopiar información útil tanto para estudiantes como profesores.

Tecnología. En tiempos modernos la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta tecnología influye en las matemáticas que se enseñan; facilita y enriquece el aprendizaje de las mismas por parte del estudiante.

Los estándares que busca mantener la educación matemática de Estados Unidos se encuentran en la página Web abajo citada. Estos principios y estándares siguen vigentes a la fecha.

6 – Sobre los contenidos programáticos en la educación matemática.

Mencionábamos en la introducción que hay una brecha grande entre lo que enseñamos y lo que está en la frontera del conocimiento matemático. Esto es particularmente visible en los últimos años, cuando los mismos profesores universitarios, no están en capacidad de dar cuenta de los logros de las matemáticas en tiempos recientes. Hace muy poco (exactamente el 19 de Marzo de 2007) se logró mapear un álgebra de Lie de características muy importantes. Una ronda de entrevistas con mis colegas me mostró, un total desconocimiento de lo que son los grupos y las algebras de Lie. Ni siquiera habían oído el nombre de Lie. Me atrevo a creer que la gran mayoría de mis colegas en Colombia están en condiciones parecidas. El año pasado Grigori Perelman rechazó la Medalla Fields que se le ofreció en el Congreso Internacional de Matemáticos, celebrado en Madrid, por su contribución a la solución positiva de la Conjetura de Poincaré. Dada la importancia de esta conjetura tanto en matemáticas como en física, el tema ha sido noticia en los grandes periódicos del mundo. Muy pocos colegas conocen de que se trata la conjetura y menos las implicaciones que la misma conlleva para la ciencia. Desde 1936 se vienen otorgando las medallas Fields por contribuciones sobresalientes a las matemáticas y las noticias de cada cuatro años en matemáticas es precisamente el nombre de los ganadores y las áreas de las matemáticas en la que trabajan los galardonados. Mirando un poco las estadísticas, los premiados están en campos como geometría algebraica y diferencial, teoría algebraica y analítica de números, ecuaciones diferenciales parciales, análisis matemático, topología y lógica matemática. Estas áreas son prácticamente desconocidas para el profesor de bachillerato y pocos profesores de matemáticas en la universidad, están familiarizados con ellas.

Ahora, si nuestro universo docente lo ampliamos a la educación media y elemental, el panorama es aun más oscuro. Pero, lo mencionado arriba, no es nada nuevo, ni una característica de los docentes de matemáticas colombianos, parece ser que este desfase, lo traemos los docentes de muchos países incluyendo aquellos llamados desarrollados. ¿Por qué, lo que enseñamos, inclusive en los cursos universitarios está tan alejado de las fronteras de la investigación matemática y sus aplicaciones? Una razón es que los contenidos programáticos de la educación básica (elemental y media) y también de la educación universitaria en ciertos aspectos, no han tenido variación substancial en los últimos cien años. Seguimos con la aritmética, la geometría euclidiana, el álgebra y el cálculo casi en estado fósil. Continuamos reciclando los mismos temas, a veces con los mismos libros. Véase el caso, por ejemplo, del Algebra de Baldor, después de más de setenta años y allí sigue firme, como el mayor libro de matemáticas que se atesora en muchos hogares colombianos. Caso parecido ocurre con los cursos de cálculo en la universidad.

Cambiamos el cálculo de Granville, por el cálculo de otros autores, como Thomas, Apostol, Leithold, etc., pero los contenidos no han sufrido mayores modificaciones. Más rigor si, más conjuntitis y demostraciones, pero, no hemos dado un paso adelante en el conocimiento de cosas nuevas.

Mientras este estatismo ocurre en la enseñanza, el conocimiento matemático, se desarrolla a pasos agigantados en sus respectivos frentes, dando origen a una brecha de tamaño descomunal con respecto a la primera, muy difícil de llenar, si no se toman correctivos a tiempo.

.

Hacer un diagnóstico en relación con la educación matemática, requiere un estudio juicioso de lo que está ocurriendo al interior de ella y quienes están llamadas a hacerlo, son las instituciones universitarias que tienen facultades de educación, desde luego, con el apoyo, iniciativa y asesoría del ministerio de educación. El espacio de esta nota no me permite entrar en detalle a este respecto. Sin embargo, quisiera señalar ciertos síntomas preocupantes, que acusa la educación en general. Estos síntomas, según mi criterio tienen que ver con dos aspectos. El primero está relacionado con los contenidos programáticos y el segundo, con la formación de los docentes de la educación básica y universitaria. Un sitio especial en esta última ocupa la educación matemática en las facultades de educación. Un factor primario en la buena educación es el tener buenos docentes, comprometidos con el cambio y la modernización.

7 – Algunas recomendaciones.

Cambiar un proceso educativo en forma global se ve muy difícil. No obstante, la complejidad de la problemática educativa, me atrevería a hacer algunas recomendaciones generales. El eje central de todo cambio deber ser una filosofía que tenga en su núcleo una educación libre, universalista y humanista. Algunos puntos específicos a tenerse en cuenta serían los siguientes.

a) Empezar el cambio haciendo reingeniería en las facultades de educación. Que la formación del maestro incluya educación bilingüe, científica y humanista. Promover la creación de licenciaturas en ciencias, área mayor matemáticas, o física o química o biología. Promover graduados con sólo un conocimiento matemático, o en un campo específico de las ciencias, es desconocer la importancia de las otras áreas y perder la oportunidad de lograr una formación integral del nuevo maestro.

b) Mayor impulso a la educación avanzada, tanto en doctorados como postdoctorados.

c) Mayor compromiso de la universidad para elevar su nivel académico buscando llenar vacantes profesorales con los más capaces abriendo la posibilidad de que profesores extranjeros de alta calidad se integren al desarrollo educacional del país.

d) Creación de institutos de alto nivel, donde se formen los profesores universitarios del futuro.

En la parte específica de la educación matemática, sugeriría

a) Enseñar Aritmética en el sentido clásico – Teoría de números integrada al álgebra desde la escuela elemental.

b) Enseñar algebra abstracta en lugar del algebra tradicional en bachillerato y en la formación de maestros.

c) Enseñar análisis matemático en lugar de cálculo infinitesimal en la formación de maestros.

d) Introducir en el Bachillerato y en la formación de docentes las geometrías no euclidianas, de Riemann y diferencial además de la geometría de Euclides.

e) Crear o mantener la cátedra de epistemología de las matemáticas como elemento integrador de toda la educación matemática. Con ello se busca poner en el mismo contexto matemáticas, lógica, filosofía y ciencias humanas.

Armenia, Julio 13, 2007.