"… y de otras proposiciones matemáticas yo deduzco el movimiento de los planetas, los cometas, la luna y el mar.". Isaac Newton.

4. 1 – Newton y el Cálculo Infinitesimal.

René Descartes (1596-1650), conocido por los matemáticos como, el inventor de la geometría analítica, y por los filósofos como el iniciador del racionalismo, también contribuyó a la solución de algunos problemas en el cálculo de tangentes. A diferencia de Fermat, su método tuvo un carácter algebraico, mas no infinitesimal, utilizando una circunferencia centrada en el eje x, y con radio perpendicular a la tangente de la curva en un punto dado. Mencionamos este enfoque aquí, para resaltar la existencia de otra alternativa diferente al uso del cálculo infinitesimal para la determinación de tangentes. No es del caso entrar aquí en detalles sobre el método de Descartes, pero su descripción y ejemplos pueden verse en la obra de Edwards previamente citada.

Lo importante en los enfoques de Newton y Leibniz es el hecho de haber englobado en una sola teoría, una amplia variedad de problemas de cuadratura, de rectificación de curvas y de cálculo de tangentes, cosa que sus antecesores lo habían logrado en casos especiales, como lo hemos mostrado, y para funciones específicas. Newton y Leibniz, además de crear métodos de carácter general que resolvían problemas más amplios que los planteados por sus antecesores, agregaron el recurso de una notación científica que aún conservamos y que permitió ampliar el espectro de las aplicaciones, más allá de la geometría y el análisis, hasta la mecánica, la astronomía y la física en general.

A lo anterior, hay que agregar la visión unificadora que Leibniz y Newton le imprimieron a los procesos del cálculo de tangentes y de cuadratura de curvas, a través del teorema fundamental del cálculo, el cual los relaciona como procesos inversos. Es decir, la integración (asociada a la cuadratura) reversa lo que la derivación (asociada al cálculo de tangentes) hace a una función con ciertas características. Igualmente la derivación va a deshacer lo que la integración le hace a una función integrable. Estos resultados que se constituyen en el núcleo central del cálculo infinitesimal, son a no dudarlo, después del teorema fundamental de la aritmética, descubierto por los antiguos griegos, la mayor conquista de la mente humana en matemáticas, lograda hasta el siglo XVIII.

Isaac Newton (1642-1727) se formó bajo la influencia de una escuela matemática, que en su tiempo ya tenía gran prestancia en Europa. Decíamos que la *Arithmetica Infinitorum* de Wallis circulaba en el tiempo de Newton y que su orientador principal en cuestiones de matemáticas fue, Isaac Barrow de la Universidad de Cambridge, uno de los precursores del cálculo y quien antecedió a Newton en la *Cátedra Lucasiana*. Debemos recordar también que, para la época en que vivieron Leibniz y Newton, Inglaterra atravesaba por una época floreciente en las ciencias y en las artes. Las universidades de Oxford y Cambridge lideraban el proceso de creación matemática. Los logaritmos ya habían sido inventados por John Napier a comienzos del siglo XVII y su perfeccionamiento por Henry Briggs (1561-1630) se conoció en 1624 a través de su obra *Arithmetica Logarithmica.* James Gregory (1638-1675), matemático escocés, contribuyó en este tiempo al desarrollo de funciones trigonométricas y sus inversas usando series de potencias.

Digamos además que la *Royal Society* de Londres, ya se había fundado y ejercía enorme influencia en el desarrollo de las matemáticas en Inglaterra y en Europa. Por esta sabia institución, pasarían figuras de tanto renombre como, Edmond Halley, Sir Christopher Wren, Robert Hooke (1635-1703) y también Newton. Es bueno recordar que los trabajos astronómicos de Kepler y las contribuciones del matemático holandés Christian Huygens (1629-1695), se conocían ya en Inglaterra y que Newton se nutrió al menos de algunas de ellas. Newton tuvo la modestia de reconocer las contribuciones de sus antecesores al afirmar: "*Si he logrado mirar más allá que mis contemporáneos es porque me he parado en hombros de gigantes*", con lo que resaltaba el uso de teorías previamente expuestas por Barrow, Galileo, Kepler y Huygens, entre otros, para lograr configurar su obra magna: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematicae*.

No sobra mencionar aquí que, en el tiempo de Newton, lo que hoy entendemos por Física, llevaba por nombre *filosofía natural*, connotación ésta más cercana al significado que la ciencia en ese entonces tenía (y que aun sigue teniendo), como es: buscar las causas de los fenómenos físicos, y, explicar estas causas en un lenguaje matemático. El discurso científico, usando lenguaje matemático ya había sido inaugurado por Galileo, cuando afirmaba que las leyes naturales están escritas en el lenguaje matemático de los triángulos, los círculos y las figuras geométricas.

El terreno científico estaba suficientemente abonado para que la semilla del cálculo infinitesimal hiciera eclosión. De no haber sido Newton o Leibniz, los que propiciaran su aparición, otros matemáticos habrían llegado a su descubrimiento. Los descubrimientos científicos dejan entrever un período de gestación, largo a veces, como fue el caso del descubrimiento de las geometrías no euclidianas, o del cálculo infinitesimal, después de más de dos mil años de existencia de las matemáticas. O corto a veces, como fue el caso del descubrimiento del genoma humano, hace unos pocos años, cuando la biología y aún la genética no cumplen doscientos años de figurar como ciencias. Esto contrasta con la creación artística en donde la obra de arte aparece por creación individual, por ejemplo, *La Mona Lisa* (*La Gioconda*) está asociada a Leonardo Da Vinci, y *La Quinta Sinfonía* a Ludwig van Beethoven. Ni la Gioconda, ni la quinta sinfonía como tales, existirían jamás, de no haber existido sus autores.

Los párrafos anteriores tratan de explicar someramente, los antecedentes de la invención del cálculo y la atmósfera científica que rodearon a Newton y Leibniz, para que se diera la feliz coincidencia de que el trabajo de estos matemáticos desembocara en el descubrimiento de esta área de las matemáticas y sus correspondientes aplicaciones.

Newton fue nombrado en la cátedra lucasiana en 1669 y continuó en la Universidad de Cambridge hasta 1696, cuando pasó a desempeñar el cargo de jefe de la casa de moneda en Londres hasta su muerte en 1727. Su época más productiva fue la comprendida entre los años 1664-1666, cuando se retiró a sus propiedades de Lincolnshire, huyéndole a la epidemia de cólera que asolaba a Cambridge por esos años. Se cree que durante esta época adelantó sus investigaciones alrededor de los tópicos que más tarde lo harían famoso: el cálculo infinitesimal, la teoría de la naturaleza de la luz y la teoría de la gravitación universal. Su libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematicae* (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural, o acortando, *Los Principia*), como obra impresa, debe en parte, su paternidad a Edmond Halley, en dos aspectos bien importantes. El primero es que fue Halley quien pagó los costos iniciales de la impresión de la obra, por cuanto la *Royal Society*, aunque había aprobado los manuscritos para publicación, adolecía por esa época, de recursos para ordenar su impresión. El segundo aspecto tiene que ver con, la edición y la corrección de las pruebas que estuvo a cargo del astrónomo británico.

Las publicaciones científicas periódicas aún no existían, y en razón a esto era difícil mostrar la prioridad en los descubrimientos. Usualmente los manuscritos circulaban entre los colegas o se trasmitían epistolarmente entre los científicos sin buscar el reconocimiento o la prioridad en tal o cual invención o descubrimiento. Esta es una de las razones que originó, la histórica polémica sobre la prioridad de la invención del cálculo infinitesimal entre Newton y Leibniz. El legado de Newton en material no publicado es enorme, a tal punto que el corpus total de esta obra excede a las cinco mil páginas manuscritas, las que serían publicadas póstumamente, apenas a partir de 1967 en ocho volúmenes con la edición de D. T. Whiteside. También la correspondencia que Newton cruzó con Leibniz ha sido publicada en varios volúmenes y de allí puede sacarse en claro que los dos matemáticos llegaron a resultados semejantes por distintos métodos y con distinta notación. El trabajo matemático de Newton aparece diseminado a lo largo de estas obras póstumas, las que permiten apreciar, en su verdadera dimensión, la magnitud de su genio.

4.2 – Introducción a la teoría de las fluxiones.

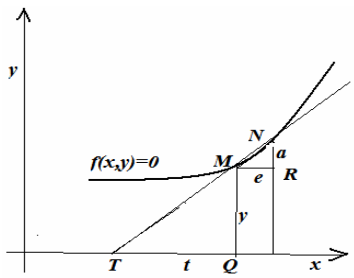

Fig. 4.2.1. *Cuando* ***N*** *se acerca a* ***M*** *a lo largo de la curva* ***f(x, y) = 0****, las secantes que determinan los puntos* ***T*** *y* ***N*** *se aproximan a la tangente, en el punto* ***M****, cuya pendiente es próxima al cociente* ***a/e*** *ó* ***y/t****. Este método fue conocido por Isaac Barrow, profesor de Newton en la Universidad de Cambridge.*

La tangente a una curva en un punto **M**, fue considerada por varios autores que antecedieron a Newton, como la recta límite de las secantes **MN**, que cortan a la curva, cuando **N** se aproxima a **M** (*Fig.* 4.2.1). Entre estos, mencionemos a Isaac Barrow, quien tocó el tema en sus clases de geometría, a las que supuestamente Newton asistió. Estas notas fueron luego publicadas como *Geometrical Lectures* en 1670. En esta obra Barrow trata problemas de cálculo de tangentes y problemas de cuadratura usando métodos previamente estudiados por Fermat.

El matemático francés, Gilles Personne de Roberval (1602-1675) consideró una curva como el lugar geométrico o la trayectoria, que traza un punto en movimiento; y la recta tangente a la curva, como la velocidad instantánea del punto en movimiento. La ley del paralelogramo para vectores, era ya conocida en el tiempo de Roberval, pero fue él, quien la aplicó a la tangente como vector velocidad instantánea. Más específicamente, si el movimiento de un punto se asume compuesto de dos movimientos simples, entonces el vector velocidad del movimiento será la resultante de las dos componentes sumadas según la regla del paralelogramo. La figura 4.2.2 muestra la situación de la tangente a la parábola representada como la velocidad ***w*** con sus componentes ***u*** y ***v***.

Roberval consideró varias curvas generadas por un radio vector, entre ellas la espiral de Arquímedes (*Fig.* 4.2.3) y la cicloide (*Fig.* 4.2.4), con el objeto de asociar a la tangente, el vector velocidad instantánea. Newton siguió el enfoque de Roberval con algunas modificaciones, lo que daría origen al llamado por él: método de las *fluxiones*. La figura 4.2.6 muestra la curva *f(x, y) = 0* y el vector velocidad instantánea como la tangente a la curva.

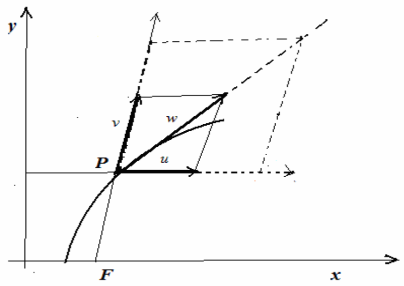

Fig. 4.2.2. La tangente a la parábola en el punto P, representada como la velocidad ***w*** con sus componentes ***u*** y ***v***, *según la ley del paralelogramo. Aquí la parábola tiene su foco en **F** y la directriz es el eje **y**.*

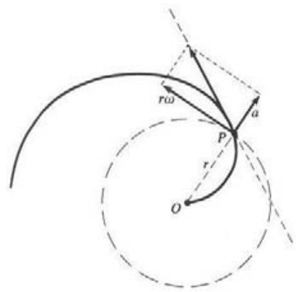

Fig. 4.2.3. *La espiral de Arquímedes puede interpretarse como el lugar geométrico de un punto que se desplaza uniformemente sobre una recta que gira en torno a **O** con una velocidad angular constante.*

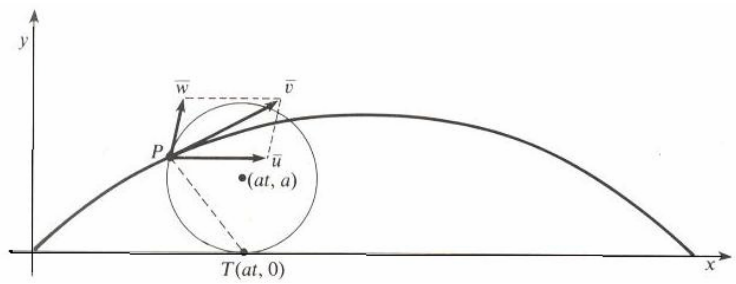

Fig. 4.2.4. *La cicloide resulta de la traza que deja un punto fijo **P** en la circunferencia, cuando ésta, rota sin deslizarse a lo largo del eje x.*

El vector tangente se puede considerar como resultante de las acciones de los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$, que corresponden a las proyecciones de la tangente en las rectas *x* y *y*. (*fig.* 4.2.5). Estas proyecciones originadas por los puntos *A* y *B* cuando se desplazan en iguales intervalos de tiempo a lo largo de las rectas *x* y *y*, las llamó Newton las velocidades fluxionales o las *fluxiones* de los puntos *A y B* (*Fig.* 4.2.6). Las fluxiones $\dot{x}$ y $\dot{y}$, corresponden simplemente, a las derivadas de *x*, y, *y* con respecto al tiempo *t*. Usando notación de Leibniz, tendríamos

$$\dot{y} = dy/dt, \text{ y } \dot{x} = dx/dt.$$

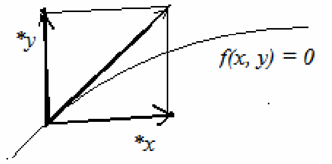

Fig. 4.2.5.

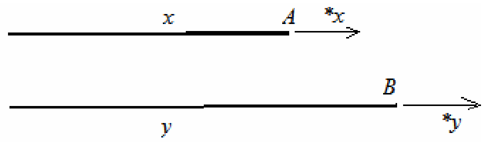

Fig. 4.2.6

En las gráficas, *x= $\dot{x}$, la fluxión de x, y, *y= $\dot{y}$, la fluxión de y.

Cuya razón es la derivada de y con respecto a x,

$$\dot{y}/\dot{x} \ = dy/dx.$$

El primer problema a resolver por parte de Newton, es aquel de encontrar: la relación entre las fluxiones $\dot{x}$, y, $\dot{y}$, dada la relación $f(x, y) = 0$. Tratándose del polinomio de dos variables:

$$f(\mathrm{x}, y) = \sum_{i,\,j\le n} a_{ij} x^i y^j \ = 0,$$

Newton encuentra que:

$$\sum_{i,\,j\le n} (i\,\dot{x}/\,x + j\,\dot{y}/\,y) a_{ij} x^i y^j = 0.$$

Podemos mostrar que esta ecuación, para el caso de dos variables, se reduce a: $\dot{x}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dot{y}\dfrac{\partial f}{\partial y} \ = 0,$

o lo que es lo mismo: $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$.

Para demostrar la fórmula general, Newton recurre al teorema del binomio, del cual ya tenía conocimiento (de ahí el nombre de: *Binomio de Newton*), e introduce el infinitesimal o (la letra griega ó*micron*), el que se comporta como cero para ciertas cosas pero que <u>no</u> es cero para otras. Esta especie de inconsistencia fue criticada duramente por el filósofo y obispo, George Berkeley (1685-1753), en su obra *El Analista*.

La fórmula general le permite calcular la tangente a una curva algebraica dada por $f(x, y) = 0$, en la forma del cociente fluxional, digamos, $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ como la pendiente de esta recta, usando las fluxiones como las velocidades instantáneas de x, y, y.

En particular si $y = x^n$, $f(x, y) = y - x^n = 0$, aplicando la fórmula para dos variables y las condiciones dadas, encontramos.

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = n\,x^{n-1}.$$

Por definición de las fluxiones de y, y, x, $\dot{y} = dy/dt$, $\dot{x} = dx/dt$, tendríamos las diferenciales de x, y, y, siguiendo la notación de Leibniz,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (dy/dt\,)/(\,dx/dt\,) = dy\,/\,dx = n\,x^{n-1}\,,$$

da la relación de las diferenciales como: $dy = n\,x^{n-1}\,dx$

4.3 – El Teorema Fundamental del Cálculo.

Teniendo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = dy/dx$, Newton se planteó el problema de hallar *y*, en términos de *x*. Cuando el cociente ya es una función explicita de *x*, digamos: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \varphi(x)$, la situación corresponde a un problema de antiderivadas, es decir, hallar una función *g* tal que su derivada, sea $\varphi(x)$.

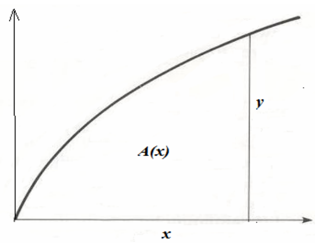

Fig. 4.3.1. *La función A(x) da el valor del área bajo la curva para un x dado.*

El caso general, $F(x, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}) = 0$, da origen a una ecuación diferencial, por cuanto que, una de las incógnitas de la ecuación es una derivada. Newton desde 1666 había relacionado la antidiferenciación con el cálculo de áreas; o como se decía entonces, con cuadratura de curvas. Es ésta, históricamente hablando, la primera vez que se relaciona el problema de cuadraturas con el cálculo de antiderivadas. Aquí aparece una aplicación del teorema fundamental del cálculo, que en forma simbólica explícita, podría escribirse como:

$$\frac{dA(x)}{dx} = y\,.$$

Donde $A(x)$ denota el área bajo la curva $y = f\,(x)$, sobre el intervalo $[0, x]$, (*Fig.*4.3.1). Esta fórmula dará un método algorítmico para calcular áreas. En palabras: para calcular el área bajo la curva, $y = f(\mathrm{x})$, debemos buscar una función *g* tal que al derivarla con respecto a *x* nos reproduzca a *f*. Por ejemplo, si sabemos $dg/dx = \cos x$, *g* será *sen x*. El mérito en el trabajo de Newton está en la sistematización, en un solo proceso, de los múltiples casos de cuadraturas y de tangentes, proceso que, los matemáticos anteriores, habían calculado separadamente. Mientras las técnicas infinitesimales previas, se basaban en la determinación del área como el límite de una suma de infinitesimales o indivisibles, Newton introduce aquí la técnica de calcular la razón de cambio del área bajo la curva (*Fig.* 4.3.1) con respecto a *x*, y entonces calcula el área por antidiferenciación. Combinando el enfoque de las fluxiones con la concepción de las tangentes y la razón de cambio de las mismas, aparece claro, por vez primera, la naturaleza precisa de la relación inversa entre el problema de las tangentes y los problemas de las áreas (cuadraturas), y el hecho de que ambos tipos de cálculos son aspectos alternos del mismo tópico matemático, aquel, caracterizado por procesos algorítmicos precisos y de aplicación generalizada.

Supongamos que y mide el área ABC bajo la curva $q = f(x)$ en la figura 4.3.2. Supongamos también que el segmento BC barre el área y cuando x se mueve entre d y e a una razón de cambio $\dot{x} = dx/dt. = 1$. Si $p = 1$, el área del rectángulo es x. Newton encuentra obvio que el cambio de y con respecto al tiempo es $q = f(x)$, es decir: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$.

Aquí, la parte crucial está en la escogencia que hace Newton de los incrementos del área, de y a un valor $y + o$, asociado al incremento de x a $x + o$, durante un intervalo de tiempo o infinitesimalmente pequeño.

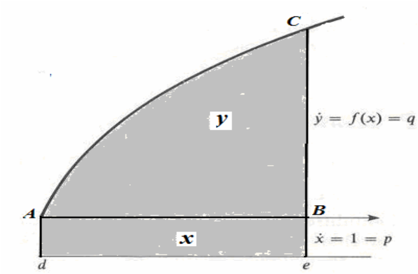

Fig. 4.3.2. *La variable y mide el área bajo la curva, cuya razón de cambio es f(x).*

Una aplicación que Newton hace de este proceso es, hallar la pendiente de la tangente a la curva con ordenada $x^{n+1}/(n+1)$, para la cual encuentra $y = x^n$. Y recíprocamente para el área bajo la curva con ordenada igual a x^n, halla un valor de $x^{n+1}/(n+1)$. Aquí Newton asume sus ejemplos, suponiendo que la constante de integración es cero.

4.4. Lo que deberíamos saber para fundamentar el Cálculo Infinitesimal.

La parte neurálgica del cálculo infinitesimal reposa en el *Teorema Fundamental del Cálculo*. Por lo tanto cabe preguntarse cuáles son las funciones f en las que este teorema se cumple. Es decir, las funciones que satisfacen la fórmula:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx. \qquad \textbf{(*)}$$

En esta fórmula radica el núcleo central del cálculo, por cuanto que en ella, se afirma que al integrar la derivada de una función, se logra información sobre el comportamiento de la función misma. La integración es un proceso que involucra datos infinitesimales de la derivada, pero que su resultado nos da información global sobre la función f. La función f', no sólo debe estar, definida en el intervalo $[a, b]$, sino que además, debe ser integrable para garantizar la existencia de la integral. Muchas funciones son continuas pero no son integrables y otras tienen derivada en todas partes pero tampoco son integrables. Por esto, el espectro de las funciones que satisfacen (*), se va a reducir a una clase de funciones que hoy se conoce como: *funciones absolutamente continuas.*[1]

[1] Información sobre estas funciones y sus aplicaciones y generalizaciones puede leerse en: HEINONEN, J. *Nonsmooth Calculus.* Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 44, No. 2. April 2007.

DEFINICIÓN. Una función continua *f*: [*a*, *b*] $\to$ ***R***, es **absolutamente continua** si, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que:

$$\sum_{i=1}^{i=n} |a_i - a_{i-1}| < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} |f(a_i) - f(a_{i-1})| < \varepsilon .$$

Siempre y cuando $\{[a_{1-1}, a_i]\}$, sea una colección finita de subintervalos del intervalo [*a*, *b*] que no se traslapen. Las funciones absolutamente continuas son las apropiadas para satisfacer (*), como lo muestra el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración[2].

TEOREMA. *Sea f:* [*a, b*] $\to$ ***R*** *una función continua. Entonces, f es diferenciable casi en todas partes*[3]*, con derivada integrable, y tal que* (*) *se cumple, si y solo si, f es absolutamente continua.*

Ejemplos de funciones absolutamente continuas son las llamadas **funciones de *Lipschitz*,** aquellas funciones *f:* [*a*, *b*] $\to$ ***R*** con la propiedad de que, existe L > 0 tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, para todo par *x, y* en [*a, b*]. Estas funciones de Lipschitz juegan un rol importante en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Las funciones de valor real, absolutamente continuas, son precisamente las que permiten hacer cálculo diferencial e integral, con las características que usualmente se estudian en el pregrado. Un ejemplo es el método de integración por partes, que facilita la integración de ciertas funciones; más explícitamente:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = -\int_a^b f(x)g'(x)dx + f(b)g(a) - f(a)g(a) .$$

Las funciones *f* y *g,* no necesitan ser diferenciables en todas partes. Pueden tener picos y ser irregulares o no suaves, pero si, deben ser absolutamente continuas. Hay una clase más general que contiene a las funciones absolutamente continuas, como son las funciones de variación acotada.

FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA. Una función *f:* [*a*, *b*] $\to$ ***R*** es de **variación acotada** si *f* satisface que: sup. $\sum_{i=1}^{i=n} |f(a_i) - f(a_{i-1})| < \infty$. Donde el supremo superior se toma sobre todos los subintervalos $\{[a_{1-1}, a_i]\}$ de [*a*, *b*], que no se traslapen. Estas funciones corresponden a las funciones que pueden expresarse como diferencia de dos funciones crecientes. Las funciones absolutamente continuas son también de variación acotada, pero lo contrario no es necesariamente correcto. Hay funciones de variación acotada que no son absolutamente continuas. El ejemplo típico es la llamada *función de Cantor*[4]. Las funciones de variación acotada son diferenciables casi en todas partes, pero puede ocurrir que, la fórmula (*) no se cumpla. El criterio que determina, cuándo una función de variación acotada es también absolutamente continua es que: *aplique conjuntos de medida cero, en conjuntos de mediada cero*. La función de Cantor aplica, al conjunto de Cantor que tiene medida de Lebesgue cero, en el intervalo [0, 1] el que tiene medida de Lebesgue igual a 1. Esto muestra que la función de Cantor no es absolutamente continua.

Siguiente Sección: *Newton y las Fluxiones*

[2] La demostración de este teorema puede verse en el Análisis de Royden, páginas 106 y 107, ya citado.
[3] "Casi en todas partes", significa en todo el intervalo [*a*, *b*], salvo en un subconjunto de él, de medida cero.
[4] Ver Royden, *opus cit.* Págs. 44 y 48, para un estudio detallado del conjunto ternario y de la función de Cantor.