“Las matemáticas presentan el más brillante ejemplo de cómo la razón pura puede con éxito, acrecentar sus dominios sin la ayuda de la experiencia”
“En cada teoría habrá tanta ciencia, como matemáticas haya”. Immanuel Kant.

Con su fórmula de derivación algorítmica para polinomios, Newton resuelve una gran variedad de problemas de tangentes. Así mismo da solución a todos los problemas de cuadratura, usando el proceso inverso como es la integración de funciones polinómicas según el teorema fundamental de cálculo. Cuando consideramos que el área por debajo de una curva viene dada por:

$$y = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

El algoritmo de Newton para cocientes de fluxiones da, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^n$.

Recíprocamente, tomando $\dot{x} = p = 1$, como la razón de cambio de x con respecto al tiempo, y, $\dot{y} = q$, como muestra la figura 4.3.2, encontramos que, $q = dy/dx = x^n$, que corresponde a la curva por debajo de la cual está la superficie cuya área es y.

4.5 – Regla de la cadena, integración por substitución y método de Newton.

El trabajo de Newton ha dado, hasta donde hemos visto, de una parte, métodos algorítmicos para calcular tangentes por medio de la diferenciación, es decir, el cálculo de $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \varphi(x)$, dado que $f(x, y) = 0$, y de otra, la antidiferenciación, esto es, el proceso inverso: en el cual, dado el cociente de las fluxiones $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, se busca encontrar la relación $f(x, y) = 0$.

Consecuencia de sus métodos dinámicos en el cálculo infinitesimal, Newton está ahora en capacidad de introducir métodos de derivación como la *regla de la cadena* e *integración por sustitución*, métodos estudiados en nuestros primeros semestres de cálculo en la universidad. El caso de la regla de la cadena tiene que ver con funciones compuestas, cuando el argumento x, digamos, se ve transformado por las funciones f y g; primero por g y luego por f. Ilustremos el método con un ejemplo. Supongamos que queremos calcular $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, si sabemos que

$$y = (1 + x^n)^{3/2}. \qquad (*)$$

La primera función g, convierte a x en $1 + x^n = z$, la segunda función f eleva el resultado anterior a la potencia 3/2. Aquí Newton introduce una nueva variable $z = 1 + x^n$ y encuentra su fluxión,

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = n\,x^{n-1},\ o,\ \dot{z} = n\,x^{n-1}\,\dot{x}.$$

De la primera ecuación (*) tenemos, $y^2 = z^3$, lo que implica que

$$2y\,\dot{y} = 3z^2\,\dot{z} = 3nz^2\,x^{n-1}\,\dot{x}.$$

De donde

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3}{2}nz^2\,x^{n-1}/y = \frac{3}{2}\,n(1+x^n)^2\,x^{n-1}/(1+x^n)^{3/2} = \frac{3}{2}n\,x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,.$$

El término $n\,x^{n-1}$, corresponde a la derivada interna de la función *y*, como la llamamos hoy. Este ejemplo ilustra el caso general que Newton trató en relación a la función polinómica *f* y al exponente *m/n*, cuando encuentra que si

$$y = [f(x)]^{m/n}, \text{ entonces, } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = m/n\,[f(x)]^{m/n-1}\,\frac{\dot{z}}{\dot{x}}\,, \text{ donde } z = f(x).$$

Análogamente encuentra fórmulas para derivar productos y cocientes de funciones.

La obra de Newton incluye el tratamiento de series infinitas, tablas de antiderivadas y un método muy útil para aproximar raíces de una ecuación polinómica, hoy conocido como el *Método de Newton*.

Ilustremos este método con la aproximación de una de las raíces de la ecuación $y^3 - 2y - 5 = 0$. Un valor próximo a la raíz es 2. Sustituyendo a *y* por la solución tentativa $y_0 = 2 + p$, donde $0 < p < 1$, obtenemos la ecuación con incógnita *p*

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0,$$

Descartando los términos no lineales, aquellos que tienen potencia mayor que uno, encontramos que $10p - 1 = 0$. El descartar los términos no lineales se explica, por el hecho de que potencias de cantidades pequeñas, menores que 1, son más pequeñas aun que las cantidades originales. Este procedimiento fue criticado duramente por George Berkeley (1685-1753) porque contradice el principio lógico de contradicción, ya que una cantidad no puede ser, cero y diferente de cero, a la vez. Sin embargo lo que busca Newton es aproximar la verdadera raíz tanto como se quiera. Resolviendo la ecuación lineal encontrada ($p = 1/10$), obtenemos la primera aproximación a la raíz de la ecuación inicial, $y_0 = 2 + p = 2 + 1/10 = 2.1$. Para obtener una segunda aproximación y_1, reemplazamos en la ecuación inicial a *y*, por $y_1 = q + 2.1$, donde $0 < q < 1$, para obtener:

$$q^3 + 6.3q^2 + 11.2q + 0.061 = 0.$$

El procedimiento es algorítmico, en el sentido que los pasos se repiten como antes. Descartando los términos no lineales, obtenemos la ecuación lineal $11.2q + 0.061 = 0$, lo que da $q = -0.0054$ y tenemos la segunda aproximación para la raíz, $y_1 = q + 2.1 = -0.0054 + 2.1 = 2.0946$. La raíz verdadera con ocho cifras de aproximación es 2.09455148, lo que hasta ahora nos da un error de una milésima con relación a la raíz verdadera.

La generalización del método es como sigue. Supongamos que se desea hallar una raíz de la ecuación polinómica

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=k} a_i x^i = 0$$

y tenemos una raíz tentativa x_n, (una aproximación a la raíz verdadera x^*). Supongamos, entonces que una mejor aproximación será $x_n + p$, la que sustituida arriba, dará:

$$0 = \sum_{i=0}^{i=k} a_i (x_n + p)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{i=k} a_i (x_n^{\,i} + i x_n^{i-1} p + ...)$$

$$= \sum_{i=0}^{i=k} a_i x_n^i + p \sum_{i=0}^{i=k} i a_i x_n^{\,i-1} + \dots$$

$$= f(x_n) + p\, f'(x_n) + \dots .$$

En este caso $f'(x)$, significa la derivada de f con respecto a x. Los puntos suspensivos incluyen todos los términos no lineales en p. Descartando estos términos, encontramos que

$$p = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Se sigue de aquí que la raíz verdadera, denotémosla por x^*, se puede aproximar como $x^* \cong x_n + p = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}$. Este último resultado nos da el valor inicial para la siguiente aproximación. Como se ve el método de Newton es algorítmico en esencia, y la convergencia de los valores x_n hacia x^*, para ecuaciones polinómicas, es bastante rápida.

La figura 4.4.1 nos muestra una interpretación geométrica del método de Newton, en la cual se ve cómo, la tangente a la curva en el punto con abscisa x_n, corta al eje x en un punto cada vez más cercano a la verdadera raíz x^*.

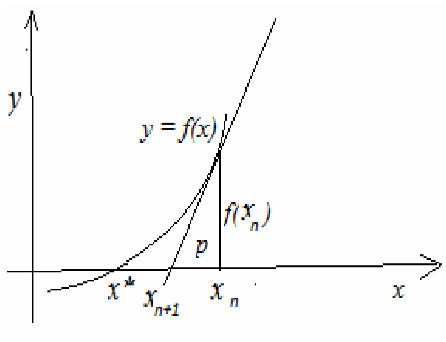


Fig. 4.4.1

Los aportes de Newton al cálculo no terminan aquí. El tratamiento de series infinitas lo hizo en dos sentidos: encontrando series para funciones dadas y a la inversa, recuperando la función cuando se conoce la serie. Este último proceso le permitió llegar a encontrar, por primera vez, la expansión de la función exponencial:

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + x^4/4! + \dots$$

En esta misma tónica logró expansiones para las funciones seno, coseno, arcoseno y arcocoseno. Finalmente digamos que logró la cuadratura de la cicloide y de otra curva, cuya historia viene de tiempos griegos, la cuadratrix.

Hipias (siglo IV AC) descubrió esta curva cuando enfrentó el problema de la cuadratura del círculo. Este problema tiene relación con el proceso de buscar un cuadrado de la misma área, que un círculo de radio dado, utilizando sólo regla y compás. La cuadratrix es una curva interesante, en el sentido de que su construcción se acomoda al modelo de Newton de las construcciones dinámicas, por cuanto la curva (figura 4.5.2) es el lugar geométrico del punto de intersección del radio AB y el lado BC, en el cuadrado ABCD, que se desplazan con velocidad uniforme; el radio desde la posición inicial AB hasta la posición final AD, y el lado, iniciando en BC, pasando por las posiciones B´C´, B¨C¨ y terminando en la posición AD. Este proceso genera la curva BFLG conocida como cuadratrix de Hipias. El punto G, es un punto conflictivo, porque cuando se va a llegar a él, el radio y el lado del cuadrado tienden a coincidir y cuando se llega a él, los dos segmentos, radio y lado, coinciden.

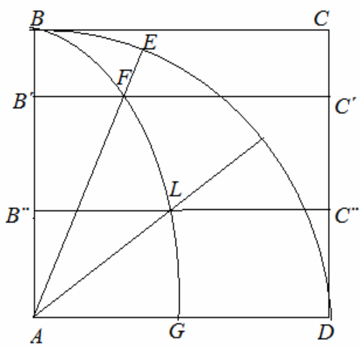


Fig. 4.4.2

Fue Pappo (Siglo III – IV AD) quien demostró, por reducción al absurdo, que se cumple la siguiente proporción (ver figura 4.4.2):

$$\frac{l(BED)}{l(AB)} = \frac{l(AB)}{l(AG)}.$$

Aquí, con l denotamos las longitudes de los respectivos segmentos. La proporción de arriba dice que se puede construir una tercera proporcional de longitud igual a un cuarto de circunferencia, entre los segmentos AG y el radio AD =AB. Sea q la longitud del arco BED, r = AD = AB, el radio de la circunferencia y g la longitud del segmento AG, entonces la proporción de arriba se puede escribir como $q/r = r/g$. Esto nos da que: $q = (1/g)\, r^2$. Puesto que c, la longitud de la circunferencia, es igual a $4q$, llegamos a que $c = (4/g)\, r^2$. Este resultado es sorprendente, por cuanto que, por primera vez, aparece una rectificación de la circunferencia en términos de g y r. Esta es una rectificación no convencional puesto que, la cuadratrix no es construible con herramientas euclidianas (regla y compás).

De otra parte, sabemos que el área del círculo es $\pi r^2 = \frac{1}{2} r(2\pi r) = \frac{1}{2} rc = \frac{1}{2} r(4q) = 2rq$. Ahora dados $2r$, y, q se construye la media proporcional, s, entre estos dos valores, o sea, buscamos un s tal que, $2r/s = s/q$. Así, existe un s tal que, $s^2 = 2rq = \pi r^2$. Esto muestra que el círculo tiene el área del cuadrado de lado s. Por lo tanto se ha logrado cuadrar el círculo mediante esta curiosa curva, la cuadratrix. El punto débil en la argumentación precedente es el hecho que el punto G que aparece en la construcción de la cuadratrix no resulta unívocamente determinado, porque al final de la construcción dinámica de de la curva, el radio y el lado coinciden y sólo se puede obtener una aproximación de él. En cuanto al valor de s lo podemos hallar tomando r =1, en la última fórmula arriba, $s^2 = \pi$, de donde $s = \sqrt{\pi}$. Por lo tanto, el área de un círculo de radio r tiene la misma área que un cuadrado de lado $s = \sqrt{\pi}\, r$.

El simbolismo usado aquí es algebraico y no disponible a los antiguos matemáticos griegos. En particular, el símbolo π (la letra inicial griega de las palabras perímetro o periferia), para representar la razón de la circunferencia al diámetro, aparece por primera vez en imprenta en la obra de William Jones (1675-1749), *Introducción Moderna a las Matemáticas,* del año 1706. Sin embargo, David Gregory (sobrino de James Gregory) usó en 1697, la razón π / ρ, para denotar el cociente de la longitud de la circunferencia sobre el radio. El símbolo llegó a estandarizarse con la obra de Leonhard Euler a partir de 1736. Para mayores detalles sobre el simbolismo y notación en matemáticas ver la obra de Boyer[1]. Esta corta digresión alrededor de la cuadratrix la hacemos para ilustrar, cómo Newton retoma el conocimiento de los antiguos griegos para acomodarlo dentro de las aplicaciones de las nuevas herramientas del cálculo.

La cobertura de la obra de Newton va mucho más allá de lo aquí mencionado. Sus tabla de integrales abarca la mayor parte de las funciones conocidas, tanto algebraicas como trascendentes y su tratamiento del cálculo de longitudes de arco incluye también una amplia gama de curvas y el establecimiento de la métrica euclídea,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} \ ,$$

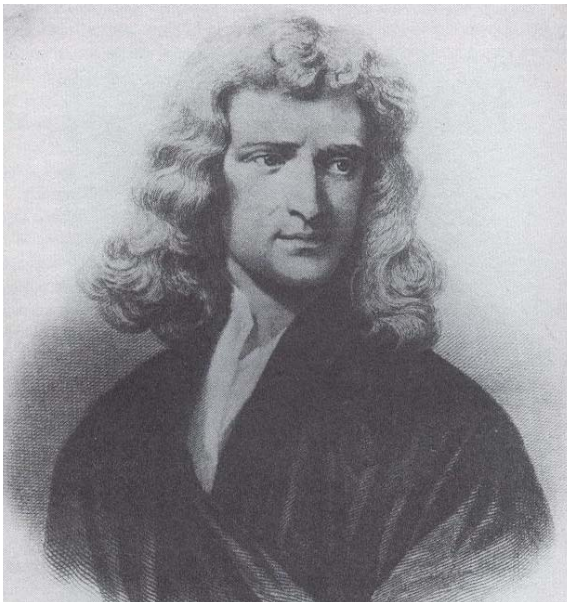
que se simboliza usualmente como, $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Newton fue un verdadero creador en matemáticas, y en general dentro de la amplia gama de las ciencias y desde luego, al igual que Leibniz también especuló en asuntos de religión y metafísica. Sus inquietudes en torno a la teología no han mostrado su trascendencia hasta la fecha, al menos hasta donde nuestro conocimiento llega. En alquimia también hizo sus incursiones, según se desprende de sus manuscritos inéditos. La alquimia fue la predecesora de la química y fue muy popular en la edad media. Uno de los objetivos de los alquimistas era convertir en oro, metales pesados, como el plomo o el mercurio, por ejemplo. Se dice, que una posible causa del desequilibrio mental que adoleció Newton en una época, pudo haber sido consecuencia del manejo de gases de mercurio en sus experimentos de alquimia. Su obra científica, aunque aceptada en los medios académicos, tuvo sin embargo, crítica en algunas esferas del mundo filosófico, como fue el caso del obispo y filósofo experimentalista George Berkeley (1685-1853) que en la obra *El Analista,* critica duramente el método de las fluxiones y particularmente los infinitesimales de los cuales afirmaba que eran “fantasmas de cantidades que se desvanecen”. Los infinitesimales estuvieron a punto de ser totalmente expulsados de las matemáticas, desde que se introdujo el enfoque conjuntista, a tal extremo que el mismo Bertrand Russell los consideraba “innecesarios, erróneos y auto contradictorios”[2]. Veremos en la próxima sección cómo a mediados del siglo XX, Abraham Robinson, introdujo a través de la teoría de modelos una forma para dar a estas entidades un asiento lógico en las matemáticas.

[1] BOYER, C. B. *Opus cit.* Pág. 441.
[2] BELL, J. L. *Infinitesimals and the Continuum.* The Mathematical Intelligencer. Vol. 17. No. 2. Spring 1995. Pag. 55.

La prioridad en relación con la invención del cálculo, en sus inicios, originó una agria polémica entre Newton y Leibniz y luego entre los seguidores de uno y de otro; polémica que tuvo hondas repercusiones en las matemáticas inglesas a partir de ese entonces. Los matemáticos seguidores de Newton se aislaron de sus colegas de la parte continental de Europa, para seguir aisladamente su accionar, principalmente en el área de las matemáticas aplicadas, como, las ingenierías, actuaría, física y astronomía. Eso explica, en parte, por qué después de Newton no aparecen matemáticos de primera línea, como si, aparecen, tantos, y de tan buena calidad, en Alemania, Francia e Italia en las generaciones siguientes a Newton. El renacer de las matemáticas puras en gran Bretaña, viene a darse en el siglo XIX, dos siglos después de Newton con matemáticos como George Boole (1815-1864), James Joseph Silvester (1814-1897), Arthur Cayley (1821-1895), Godfrey Harold Hardy (1877-1947) y Bertrand Russell, de quien hemos hablado antes. Se puede decir que fue Hardy, ya a comienzos del siglo XX, el primer matemático puro, de gran renombre y de vasta producción intelectual, después de Isaac Newton.

Las contribuciones de Newton tocadas aquí someramente, son apenas una pequeña parte de su ingente producción intelectual. El hecho de ubicar a Newton como uno de los tres más grandes matemáticos de toda la historia, junto a Karl Friederich Gauss y Arquímedes, no es gratuito: Newton enriqueció de tal manera el conocimiento científico de la humanidad, que no queda la menor duda de que, después de él, hemos podido entender mucho mejor el mundo que nos rodea, y explicar en forma racional y coherente muchos de los fenómenos que antes, por nuestra ignorancia, teníamos que atribuirlos a fuerzas sobrenaturales. Queda por estudiar el gran *corpus* científico de los *Principia*, que contiene toda la física clásica, incluyendo la teoría de la gravitación, aquella que inauguró el nuevo enfoque de la mecánica celeste, continuada luego por Joseph-Louis Lagrange (1736-17813) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827).



Isaac Newton, es uno de los tres matemáticos más grandes de la historia, al lado de Arquímedes y Karl F. Gauss [3]

Siguiente Sección: ***La Contribución de Leibniz***

[3] Foto tomada del excelente libro: DUNHAM, W. *The Mathematical Universe*, Pág. 132. John Wiley & Sons, Inc. New York. 1994.