"*Las matemáticas puras son un inmenso organismo construido entera y exclusivamente de ideas que emergen en las mentes de los matemáticos y que habitan en esas mentes*"..Yuri Manin.
"*¿De que trata la lógica matemática? Trata de las matemáticas aplicadas a las matemáticas mismas y a algunos problemas en filosofía*". Saharon Shelah.

1.3 La función descriptiva de la Lógica.

Mencionábamos antes que la lógica de primer orden se queda corta para hacer frente a los problemas de las matemáticas actuales. Sin embargo, conceptos relacionados con continuidad, diferenciabilidad y las variadas definiciones de integral, tratados por Cauchy y Riemann, pueden manejarse con lógica de primer orden, usando los recursos del tradicional método de los $\varepsilon - \delta$. El núcleo de la definición de continuidad subyace en el concepto de límite. Como mencionamos en la lección pasada, definir continuidad es algo muy difícil en el lenguaje usual y comúnmente dejamos que sea la intuición la que nos de la idea de continuidad. Desde el punto de vista matemático el concepto de continuidad sigue siendo confuso para nuestro intelecto y aún en la época en que vivimos, la discusión en cuanto a su definición exacta, continúa. La definición clásica para límite de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) con su respectiva aritmetización debida a Karl W. Weierstrass (1815-1897), establece que una función f tiene a L como límite, cuando x se aproxima a un número p, si:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)\ (0 < |\ x - p\ | < \delta \Rightarrow 0 < |f(x) - L| < \varepsilon). \qquad \textbf{(*)}$$

Se ve claro que esta definición está formulada con el recurso de la lógica de primer orden, puesto que los cuantificadores universal y existencial juegan un papel sustancial y las entidades involucradas corresponden a variables, o a números y no a clases. El carácter lógico de la definición de arriba contrasta con la definición intuitiva en el lenguaje usual de límite: ***L es el límite de f(x) cuando x tiende a p, si: a medida que x se aproxima a p también f(x) se aproxima a L***. Lo que simbólicamente se representa como:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L .$$

La expresión (*) en su simplicidad involucra múltiples conceptos desde lo más elemental como son las operaciones aritméticas, hasta lo más avanzado de las matemáticas, como podría ser el análisis y la topología en sus raíces más profundas. Esta expresión no es más que el enunciado topológico:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ \delta > 0)\ (x \in \mathrm{N}_\delta(p),\ x \neq p \Rightarrow f(x) \in \mathrm{N}_\varepsilon(L),\ f(x) \neq L). \qquad \textbf{(**)}$$

Donde $\mathrm{N}_\delta(p)$ es el símbolo para representar una vecindad del punto p y radio δ y análogamente, $\mathrm{N}_\varepsilon(L)$ se usa para representar una vecindad del punto L y radio ε. En ambos casos la vecindad, o esfera como se llama en análisis, no incluye el centro de la misma.

El anterior análisis se puede llevar, con los cambios pertinentes, a la definición de la integral de Riemann y de la integral de Lebesgue, cuyos desarrollos se dieron a fines del siglo XIX y principios del siglo XX. Buscando el modo de fundamentar lógicamente algunos conceptos, los matemáticos encontraron otras entidades dignas de presentarse en sociedad; como fue el caso de los cardinales transfinitos introducidos por Georg Cantor (1845-1918) y los conjuntos medibles estudiados por Henri Lebesgue (1875-1941).

Dos funciones de la lógica se pueden distinguir en lo relativo a sus aplicaciones al conocimiento matemático. En primer lugar la *función descriptiva* (conceptualización lógica), que expresa el contenido matemático de las proposiciones matemáticas. Muchos fenómenos interesantes en los fundamentos de las matemáticas llegan a ser más asequibles a la luz de las tensiones que se hacen evidentes entre esta función descriptiva de la lógica y la otra función de la lógica que es la *función deductiva*. De las dos funciones es, es la descriptiva, la más relevante de las dos. Si las proposiciones matemáticas no fueran expresadas en términos de conceptos lógicos tampoco sus razones inferenciales podrían manejarse por medios lógicos. Lo que hemos llamado la función descriptiva de la lógica puede usarse como herramienta al servicio del análisis conceptual. Esta posibilidad se ilustra con ejemplos tomados de la historia de las matemáticas como los arriba mencionados de límite y continuidad, y más aún, fuera de las matemáticas. Es lo que hace Hilbert en sus Fundamentos de Geometría cuando dice que los axiomas de la geometría no son sino, definiciones implícitas de los conceptos geométricos.

Es importante destacar que esta función descriptiva de la lógica al formular los axiomas matemáticos, es la misma, y así igualmente indispensable, no importa si los axiomas pertenecen a un sistema axiomático interpretado, como por ejemplo, los axiomas de la termodinámica[1] o interpretados en la geometría, o en un sistema ininterpretado de axiomas, tal como los axiomas de la teoría de grupos[2], teoría de cuerpos o teoría de redes. Aún, las teorías matemáticas más abstractas, pueden pensarse como explicaciones de ciertos conceptos intuitivos. Es el caso de la topología como explicación del concepto de continuidad, la teoría de grupos como la explicación de la simetría, la teoría de redes explicando ideas de las nociones de orden, etc. En todos estos casos, para propósitos explicativos, las nociones lógicas de algún tipo, son insustituibles. Así podemos ver que aquellos filósofos que sostienen que ciertas nociones lógicas como los cuantificadores no tienen el mismo significado en las teorías matemáticas que en la vida diaria, no sólo están fuera de foco, si no también, fuera del mapa. Al contrario, la representación de las proposiciones matemáticas en lenguaje formal o no formal se hace con la presunción de que las constantes lógicas[3] se usen con su significado normal.

Un análisis detenido de las diferencias entre las dos funciones de la lógica genera nuevas preguntas. La principal de ellas tiene que ver con la forma en que las diferentes partes y aspectos de la lógica sirven a cada una de las dos funciones ya descritas. ¿Cuáles partes sirven a qué funciones? ¿Qué se requiere de la lógica para apoyar a una de las funciones de la lógica? O debe haber, por alguna razón una sola lógica indivisible que sirve a los propósitos descriptivos y deductivos de la lógica. Estas son preguntas fundamentales en la filosofía de las matemáticas, que no se formulaban con frecuencia en la literatura filosófica de hace unas décadas.

---

[1] Entre los axiomas básicos de la termodinámica figuran: a) La preservación de la energía, b) El calor siempre fluye de lo caliente a lo frío, nunca lo contrario, a no ser que medie otro factor.

[2] Un grupo es una estructura matemática caracterizada por un conjunto X en el cual se ha definido una ley de composición interna (digamos "."), con los siguientes axiomas: a) $x.(y.z) = (x.y).z$. b) Existe un elemento identidad e tal que $x .e = e. x = x$. c) Existe un inverso a^*, tal que para cada a en X, tal que $a.a^* = a^*.a = e$. Un ejemplo de grupo es el conjunto de los números racionales con la operación multiplicación. Aquí la unidad es el número 1. Otro ejemplo cercano, es $\mathbf{Z}$, el conjunto de los números enteros con la operación suma y el elemento neutro el número 0.

[3] Constantes lógicas como "$\forall$", o "$\exists$", por ejemplo, tienen el mismo significado en el lenguaje usual, que en el lenguaje matemático.

Reconociendo la función descriptiva de la lógica en las teorías matemáticas en situaciones de hecho, se acentuó el carácter puramente lógico de los sistemas axiomáticos, como en el caso del sistema construido por Hilbert en los *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría). No sólo todas las pruebas de los teoremas deben darse a partir de los axiomas por medios puramente lógicos, debe también lograrse que el aspecto representacional de los axiomas se haga con medios puramente lógicos. En la práctica esto normalmente significa que las únicas nociones no lógicas en el sistema axiomático son ciertas relaciones y propiedades no definidas entre los objetos de la teoría en cuestión. Entre ellas, solamente estas cosas se asume que están implícitamente establecidas por medio de los axiomas.

Este carácter puramente lógico de la formulación de los axiomas se requiere sólo parcialmente como requisito para que la prueba de los teoremas, a partir de los axiomas, sea puramente lógica. Esto es parte y objetivo de la concepción de Hilbert en el método axiomático. Una razón parcial es que las únicas entidades que los axiomas pueden mencionar, deben ser los objetos de la teoría. Verbigracia, en los axiomas de la geometría no debemos postular una correspondencia entre puntos sobre la recta y números reales. Por cuanto estos últimos no son objetos de la geometría. Como hecho histórico, los axiomas de la geometría elegidos por Hilbert parecen estar profundamente influenciados por el requerimiento de que ellos deben ser puramente lógicos en el sentido ya descrito.

El estudio sistemático de la función deductiva de la lógica se conoce como ***teoría de la prueba***, también llamada por David Hilbert en 1922 *Metamatemáticas*, y el estudio sistemático de la función descriptiva de la lógica se conoce como ***teoría de modelos*** o ***lógica semántica.*** Esta última ha tenido muchos contradictores y ha generado polémica hasta el extremo de negarle la posibilidad de su existencia. No descartando tales dudas, la teoría de modelos aparentemente ha superado las críticas y se manifiesta como algo posible por el hecho de ser actual, como dirían los escolásticos. El más conocido y famoso de los propulsores de la teoría de modelos fue Alfred Tarski (1901-1983).

Los modelos de la lógica no son exactamente los mismos a los que estamos acostumbrados en las ciencias, como por ejemplo en la dinámica de Newton o en el modelo helicoidal del ADN de Watson y Crick. En lógica un modelo es la realización de un sistema axiomático dado para interpretar sus nociones básicas en una forma o en otra. Un ejemplo sencillo de llevar a la realidad un sistema axiomático es el caso de la relación de orden lineal[4] en un conjunto S. Si “ $<$ ” es la relación de orden con las propiedades: i) **Transitividad**: $x < y$, $y < z$ implica que $x < z$. ii) **Asimetría**: Dos elementos *x, y* de S, satisfacen sólo una de las dos relaciones; $x < y$, *ó* $y < x$. iii) **Comparabilidad**. Dados *x, y en* S, con $x \neq y$, se cumple $x < y$ ó $y < x$. Es decir todos los elementos de S son comparables a través de la relación “$<$”. Hasta aquí la axiomática para la relación de orden lineal. Ejemplos de modelos para esta axiomática son **Z**, el conjunto de los enteros y **R**, el conjunto de los números reales.

Pero, ¿Cuáles precisamente son las presuposiciones conceptuales de la teoría de modelos? El concepto crucial en tal teoría es, indiscutiblemente, el concepto de modelo. La idea es discutir qué dice o qué no dice, una frase u oración (fórmula) S al asociarse a una clase de estructuras,

[4] Para una definición de orden en general ver el final de la sección 2.5 de estas notas.

también conocida como modelo, escenario, sistema, mundo posible o simplemente mundo. Vamos a llamar esta clase ***M***(S). Estrictamente hablando hay aquí dos sentidos relacionados de modelo, dependiendo de que a las constantes no lógicas de S en el paso de S a ***M***(S) se les permita, o no, ser reinterpretadas. Modelos de la segunda clase son desde luego los mismos que los de la primera clase, módulo isomorfismo[5]. En los fundamentos de las matemáticas, la distinción entre las dos clases de modelos hace poca diferencia.

Pero ¿Cómo se especifica ***M***(S)? Para especificarlo debemos hacer obviamente dos cosas. Primero, debemos tener una clase Ω (conjunto o espacio) dada de modelos, esto es, estructuras de algún tipo apropiado. Segundo, con referencia a S debemos dar alguna especie de criterio para que un miembro ***M*** de Ω califique como uno de los modelos de S.

La pregunta sobre la escogencia de Ω no atrajo la atención de los lógicos, si no hasta los años de 1980 cuando Jon Barwise y Solomon Feferman[6] publicaron sus trabajos sobre lógicas abstractas (model-theoretical logics). Independientemente de ellos, ciertos candidatos interesantes para una escogencia no estándar de Ω se habían propuesto. A estos presuntos o especiales modelos se les puso la restricción de ciertas propiedades de *extremalidad* (maximalidad y minimalidad) que posteriormente van a tener aplicaciones en la teoría de las lógicas abstractas.

Para especificar ***M***(S), entonces, habrá que dar un criterio que ligue a S con el modelo propuesto. Lo más inmediato será exigir que ***M*** cumpla la condición de que S sea verdadera en ***M***, o sea, ***M*** es modelo de S si y solo si S es verdadera en ***M***. Y las condiciones de verdad de una frase en un modelo son aquellas que las definiciones de verdad codifican. Así, la especificación de todas las relaciones importantes de ser un modelo de S es materia de las ***definiciones de verdad***. La cuestión de la posibilidad de definiciones de verdad y la cuestión de la presunción de tales definiciones de verdad, son así del mayor interés para los fundamentos de la lógica y de las matemáticas.

La viabilidad filosófica de la teoría de modelos reposa o falla según la viabilidad filosófica de las definiciones de verdad, y la dependencia relativa o independencia de la teoría de modelos sobre otros enfoques de los fundamentos es materia de si esos otros enfoques están presupuestados en la relevancia de las definiciones de verdad. Aunque Alfred Tarski[7] nunca destacó el hecho, no es accidental que el mismo pensador hubiera desarrollado tanto las primeras definiciones explícitas

---

[5] En el lenguaje usual *isomorfismo* significa que tiene la misma forma. En matemáticas el término se refiere a una función de un conjunto en otro que preserva determinadas propiedades. En teoría de grupos un isomorfismo preserva la estructura, digamos la estructura de grupo. En topología, el isomorfismo preserva la continuidad.

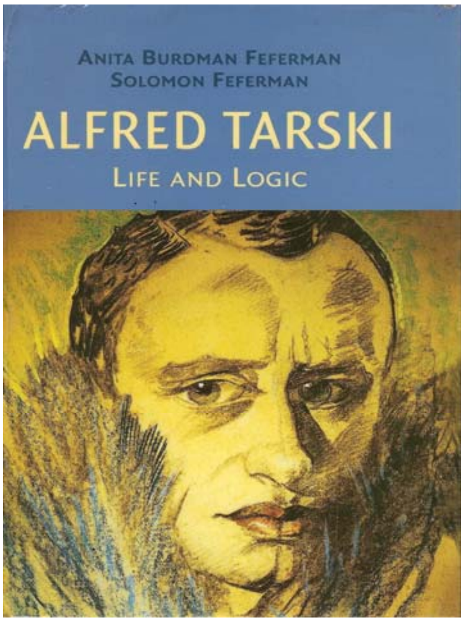
[6] Feferman es uno de los grandes lógicos contemporáneos, que entre otras distinciones tiene la medalla Rolf Schock de la Academia de Ciencias de Suecia. Para formarse una idea de su importancia en las matemáticas contemporáneas, basta mirar su hoja de vida en la Web: http://math.stanford.edu/~feferman/ Recientemente Solomon Feferman, discípulo y amigo de Tarski publicó una biografía del matemático polaco, donde se destaca su obra y el medio social y científico que le tocó vivir. La referencia completa es:
FEFERMAN, A. B., et al. *Alfred Tarski. Life and Logic*. Cambridge University Press. Reprint 2005. New York. 2005

[7] Para información biográfica y conocer la obra de Tarski visite: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Tarski.html.

.

de verdad y luego con sus estudiantes y colaboradores, la teoría contemporánea de modelos, en el sentido técnico más estricto.

El valor de verdad de una frase está determinado por los atributos semánticos de sus expresiones constituyentes. Aplicado esto a las definiciones de verdad, se diría que el valor de verdad de una frase (fórmula) depende de los valores de verdad de sus expresiones constituyentes. Desafortunadamente, las expresiones constituyentes de frases cuantificadas típicamente tienen variables libres. Al ser fórmulas abiertas y no proposiciones, las mismas no tienen valores de verdad. Esto explica el primer aspecto de la definición de verdad de Tarski. El valor de verdad de una frase está definido por él con la ayuda de otra noción, la cual también aplica a fórmulas abiertas, como es la noción de *satisfacción*. La definición se aplica de adentro hacia afuera, comenzando con las más simples fórmulas (atómicas) de la frase en cuestión.



A la izquierda retrato de **Alfred Tarski** (1901-1983) en la portada del libro biográfico escrito por Anita y Solomon Feferman en 2004. A la derecha una foto de Tarski en sus años de esplendor en Berkeley. Alfred Tarski es uno de los grandes lógicos en la historia de la humanidad. Nació y se formó intelectualmente en Polonia bajo la tutela de destacados filósofos polacos como Jan Lukasiewics y Tadeusz Kotarbinski. El lógico polaco dejó una honda huella en la lógica y en los fundamentos de las matemáticas. La escuela que él inauguró en la Universidad de Berkeley formó famosos lógicos entre ellos, el mismo Solomon Fefferman y los hoy reconocidos matemáticos, Jerome Keisler, Julia Robinson, Donald Monk y Dana Scott. Este último, al igual que Feferman y Hintikka recibieron el Schock Prize en Filosofía y Lógica de la Academia de Ciencias de Suecia, un premio de la misma altura que un Nobel.

Siguiente Entrega: *Definición de Verdad Tipo Tarski*