3.4 Geometría de Riemann.

La aproximación de Lobatchevsky y Bolyai a las geometrías no euclidianas se hizo a través del cuestionamiento del V postulado, pero aceptando los restantes postulados de Euclides. El postulado relativo a que los segmentos de recta se pueden extender indefinidamente en ambos sentidos no es tan evidente, y en efecto, fue por allí que Bernhard Riemann (1826-1866) logró abrirse paso hacia otro tipo de geometría.

Poco tiempo después de que los trabajos de Lobatchevsky y Bolyai se conocieran, Riemann, en su trabajo de promoción a profesor universitario, presentó un enfoque nuevo sobre geometrías no euclidianas, originado en una concepción diferente de interpretar el concepto de recta. La idea radica en diferenciar las rectas, *entre las que se prolongan al infinito*, y las *que se extienden indefinidamente*. El ejemplo más próximo, para interpretar esta idea, lo da el caso del ecuador terrestre que es finito, pero que se prolonga indefinidamente en dos direcciones, mientras que la recta euclidiana se supone infinita en ambas direcciones. Siguiendo esta idea de rectas finitas pero extensibles indefinidamente, se entra a considerar el efecto que esta suposición tiene en relación con el postulado de las paralelas. Volviendo a las gráficas, consideremos la figura 3.5.1, en la que se muestran los puntos Q que se desplazan a la derecha y los puntos R moviéndose hacia la izquierda sobre la recta L, puntos que a su vez generan familias de rectas, que unen estos puntos, con el punto P exterior a L.

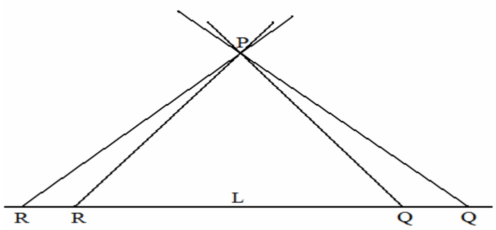

Fig. 3.5.1. En la concepción de Riemann, las rectas originadas cuando el punto Q se desplaza a la derecha, vuelven a salir por la izquierda. Así mismo las rectas RP originadas cuando R se mueve a la izquierda, vuelven a salir por la derecha. En ningún caso las rectas que pasan por el punto exterior P, se vuelven paralelas a la recta L.

En la geometría euclidiana veíamos que estas rectas tienden a una recta única, la recta paralela a L que pasa por P. En las geometrías no euclidianas, vistas en la sección anterior, según como se muevan las rectas, ellas se aproximan a dos rectas distintas. En la visión de Riemann las rectas que van por la derecha vuelven a salir por la izquierda a iniciar un nuevo ciclo y de modo similar, las rectas que van hacia la izquierda saldrán por la derecha, y en ningún caso logran ser paralelas a L. La conclusión a la que se llega, es que en este enfoque no hay paralelas a L que pasen por el punto P. Como si esto no fuera suficiente, Riemann propuso algo todavía más revolucionario, considerar que dos puntos P y Q podrían determinar más de una recta. Queremos recalcar aquí, que estas consideraciones hechas en torno a las variantes de los axiomas de Euclides tienen un carácter puramente lógico, y si este sistema extraño tiene un modelo en la realidad es materia para consideraciones de otra índole. La motivación de Riemann para llegar a su nueva geometría, tuvo que ver con consideraciones relacionadas con una geometría para la superficie de una esfera, en donde las rectas serán circunferencias máximas, es decir, intersecciones de la superficie con planos que pasan por el centro de la esfera. Estas rectas, determinan la menor distancia entre dos puntos distintos de la esfera.

Decíamos en la exposición anterior que la geometría hiperbólica tenía con la geometría euclidiana teoremas comunes. Igual se puede decir de la geometría de Riemann, donde siguen valiendo teoremas de la geometría de Euclides. Este es el caso, por ejemplo del teorema que afirma: *ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida*. Similarmente: *en todo triángulo a lados iguales, se opone ángulos iguales*. La razón de que estos teoremas valgan en las tres geometrías se debe al hecho que se derivan de axiomas comunes a las tres.

Sin embargo, otros resultados de la geometría de Riemann, riñen con similares de la geometría euclidiana, como:
1) *Todas las perpendiculares a una recta dada, se encuentran en un punto* (Fig. 3.5.2); estas rectas en la geometría euclidianas serían paralelas.

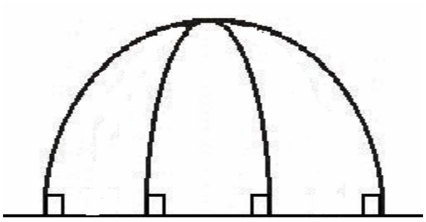

Fig. 3.5.2. En la geometría de Riemann, las perpendiculares a una misma recta se encuentran en un punto. Por ejemplo los meridianos son perpendiculares al Ecuador y se encuentran en el Polo Norte.

2) *Dos rectas encierran una superficie.* Esto se muestra en la figura 3.5.3. Este hecho se puede visualizar, por ejemplo, en los llamados husos horarios, que ocurren en la asignación de la hora en referencia al meridiano de Greenwich. Por ejemplo Colombia está en el mismo huso horario que Miami y Nueva York. Los husos horarios corresponden a las áreas entre dos meridianos sucesivos.

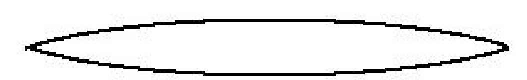

Fig. 3.5.3. En la geometría de Riemann dos rectas encierran una superficie, como es el caso de dos meridianos consecutivos de la tierra que encierran lo que se llama un huso horario.

3) En la geometría de Euclides: *Dados tres puntos distintos A, B y C de una recta, sólo uno de ellos está en medio de los otros dos* (Fig. 3.5.4).

Fig. 3.5.4. En la geometría euclidiana, *dados tres puntos en la misma recta, sólo uno de ellos está en medio de los otros dos. En la gráfica sólo B está entre A y C.*

En la geometría de Riemann: *Dados tres puntos arbitrarios C, D, E, distintos en una recta, hay tres casos que se cumplen simultáneamente, a saber: a) D está entre E y C; b) C está entre D y E; c) E está entre C y D* (Fig. 3.5.5).

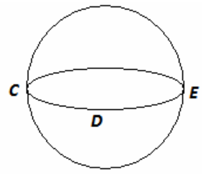

Fig. 3.5.5. En la geometría de Riemann, *dados tres puntos en la misma recta, hay tres posibilidades:* ***i****) CDE, D está entre C y D.* ***ii****) DEC, E está entre D y C.* ***iii****) ECD, C está entre E y D.*

Con la geometría hiperbólica, la geometría de Riemann, comparte el resultado: *Dos triángulos semejantes son también congruentes* (Fig. 3.5.6).

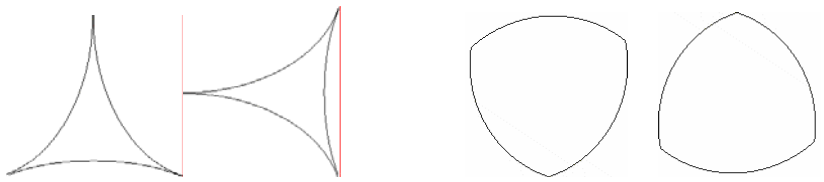

Fig. 3.5.6. En las geometrías hiperbólica y de Riemann, *si dos triángulos son semejantes son también congruentes*.

Teoremas que sorprenden son los siguientes: La suma de los ángulos interiores de un triángulo mide más de 180º, y, entre dos triángulos, el que tiene mayor suma angular, tiene la mayor área. Este último resultado difiere sustancialmente del análogo en la geometría hiperbólica, donde se cumple exactamente lo contrario.

Volvamos a las preguntas centrales de la epistemología. En relación al propósito de la geometría riemanniana, más allá de lo que podría interpretarse como mera especulación de los matemáticos, nos podemos preguntar si la geometría de Riemann tiene algún modelo donde ella pueda validarse, o un mundo que pueda visualizarse con esta geometría. La respuesta es afirmativa y el modelo lo tenemos más cerca de lo que pensamos: la geometría de Riemann se visualiza en el mundo físico que nos rodea, donde las rectas, los ángulos, los triángulos y el concepto de distancia se acomodan a lo que dictamina la geometría de Riemann; la esfera es el modelo preciso y la tierra que se asemeja a una esfera sirve de modelo a esta geometría, al igual que la seudoesfera sirvió de modelo para describir la geometría hiperbólica y la superficie cilíndrica para modelar la geometría euclidiana.

La curva que conecta dos puntos de la esfera de tal modo que su distancia sea mínima, es el arco de la circunferencia máxima que pasa por esos dos puntos y tal que su centro coincide con el de la esfera (Fig. 3.5.7). Estos arcos se asemejan a los segmentos de recta en la geometría euclidiana.

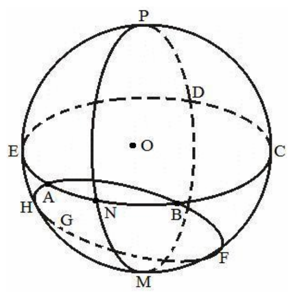

Fig. 3.5.7. La distancia entre dos puntos, digamos P y C, es la longitud del arco de circunferencia máxima que los contiene. En general la distancia entre dos puntos se mide con el arco de circunferencia máxima que pasa por ellos. Las rectas ENCD y MNPD se encuentran en N y D. Los puntos N y D se llaman antípodas,

Recordemos que la superficie de una esfera hueca, de radio R en $\mathbf{R}^3$, se define por:

$$S^2_R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Esta superficie, también llamada 2-esfera, es un ejemplo, (entre los más sencillos, después de la recta y la circunferencia), de ciertos objetos topológicos introducidos por el mismo Riemann, que se conocen como variedades (o *manifolds,* en inglés). Para un estudio completo de variedades, se puede consultar el libro de S. S. Chern[1].

No es difícil verificar que los axiomas de la nueva geometría se satisfacen en la esfera, al interpretar las rectas como circunferencias máximas. Por definición, las rectas son interminables, en los dos sentidos, pero de longitud finita. De otra parte no hay rectas paralelas en la esfera, porque cualquier par de circunferencias máximas se encuentran, no sólo una vez, si no dos veces. Por ejemplo, las circunferencias ENCD y MNPD (Fig. 3.5.7) se encuentran en N y D. Estos puntos se llaman antipodales y decimos que N es la antípoda de D y viceversa, Dos puntos pueden determinar más de una recta, como puede constatarse en la esfera (ver los puntos diametrales N y D en la figura 3.5.7), pero también puede ocurrir que por dos puntos como A y B pase solo una recta. Puede observarse además que la elipse HGFB no es una "recta" en la esfera de la figura 3.5.7.

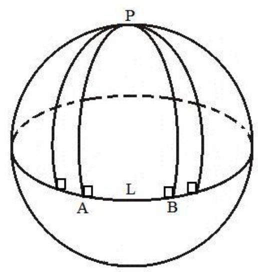

Fig. 3.5.8. La suma de los ángulos interiores de un triángulo esférico es mayor que dos rectos, como se ve en el triángulo ABP.

Puesto que los axiomas de la geometría de Riemann describen en forma correcta propiedades de la superficie de la esfera, los teoremas que se deduzcan lógicamente de estas propiedades deben ser válidos también en esta superficie. Un teorema ya mencionado, afirma que, todas las perpendiculares a una recta se encuentran en un punto. Tomando una circunferencia máxima L como muestra la figura 3.5.8, uno ve que, las perpendiculares a ellas se interceptan en el punto P.

Así por ejemplo, si L representa al ecuador terrestre, las perpendiculares se tocan en los polos, norte y sur. Otro teorema establece que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suma más de 180º. Debido a que nuestras rectas son circunferencias máximas, un triángulo está formado por arcos de tres de ellas. Uno de estos triángulos se muestra en la figura 3.5.8 como ABP. Puesto que los ángulos en A y B, por ser rectos, miden 180º, es evidente que la suma de sus tres ángulos sea más de 180º. Este resultado vale para todos los triángulos esféricos. La consecuencia del anterior análisis es que cada teorema de la geometría de Riemann puede interpretarse en la esfera, teniendo en cuenta solamente que, cuando hablemos de rectas pensemos que estamos hablando de circunferencias máximas en la 2-esfera. Por lo tanto ya estamos en condiciones de dar completo significado, tanto intuitivo, como geométrico, a la geometría riemanniana. Pero más aun, esta geometría da respuesta exacta, a problemas prácticos y científicos relacionados con la geometría de la superficie de la esfera.

Después de estudiar, aunque sin mayor detalle, tres tipos de geometrías, creo que ya tenemos un criterio básico para decidir, cuál de estas geometrías, se acomoda mejor, como instrumento para la

[1] CHERN, S. S. et al. *Lectures on Differential Geometry.* Series on University Mathematics. Vol. 1. World Scientific. Singapore. 1999. Chern (1911-2004) fue uno de los grandes matemáticos del siglo XX, nacido en la provincia de Chekiang en China. Después de sus estudios básicos en su país, hizo sus estudios superiores en Hamburgo, Alemania y luego en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, New Jersey. Fue profesor en la Universidad de Chicago, de la Universidad de Berkeley y de varias universidades de China. Sus contribuciones a la geometría riemanniana y a la geometría diferencial fueron muchas.

descripción del mundo que nos rodea. Cuando se va a calcular la distancia entre dos puertos, digamos entre Lisboa y Nueva York, no pensamos en construir un túnel rectilíneo que una a esas dos ciudades para calcular la distancia que separa una ciudad de la otra. En este caso sería como medir la longitud de la cuerda cuyos extremos son las respectivas ciudades. Lo que se hace normalmente es, recurrir a la cartografía y con la ayuda de escalas apropiadas, calcular la distancia en millas o kilómetros, medidos sobre la superficie marina. Esto corresponde al cálculo de la longitud de arco de la circunferencia máxima que pasa por las dos ciudades. Esta longitud se calcula usando geometría de Riemann directamente o a través de proyecciones hechas sobre planos cartográficos, como son las proyecciones de Mercator. Para un estudio más detallado de estas transformaciones, ver el texto de la conferencia del autor de estas notas en el *Seminario Interno de Matemáticas*[2].

3.5 Retrospección y conclusiones.
Decíamos al principio, que la historia de la geometría se remonta a los tiempos de los faraones del tercer milenio antes de Cristo y que la geometría, en su concepción axiomática, floreció en Grecia en el siglo de Pericles (Siglo V AC). El cuestionamiento en su parte formal, apenas vino a darse, con alguna timidez, en el siglo XVIII, principalmente con los trabajos de Sacheri. En filosofía uno tiene que preguntarse permanentemente, por las razones que hacen que los conceptos se mantengan y resistan la crítica, y en el caso de la geometría, esta saludable metodología, históricamente no se aplicó, o quienes lo hicieron, antes de la aparición de las geometrías no euclidianas, no tuvieron las suficientes agallas para romper el cerco de autoridad que rodeaba a la geometría, tomada en general, como el modelo a seguir, de una teoría axiomatizada y considerada inexpugnable. Este prejuicio del hombre de creer que en matemáticas las teorías, mientras estén axiomatizadas son capaces de resistir cualquier análisis, se rompió con los trabajos de Gauss, Lobachevsky, Bolyai y Riemann. Esta lección de temeridad frente a la autoridad de la ciencia nos debe llamar a la reflexión para entender que aunque las matemáticas son un gran referente en torno al concepto de verdad, ellas de por si no son la verdad misma. El hombre a través del tiempo viene moldeando y perfeccionando los sistemas matemáticos de tal modo que al criticarlos y buscar alternativas inteligentes de solución a sus problemas, termina enriqueciendo y abriendo nuevos horizontes tanto a las matemáticas mismas, como en general, a las demás ciencias.

¿Por qué, la geometría de Riemann tan cercana al mundo físico que nos rodea, aparece tan tarde en el devenir histórico de la ciencia? Las consideraciones anteriores explican en parte la causa de este retraso. Pero otra razón puede estar en la psiquis del hombre, que tiene en su concepción mental un mundo euclidiano transmitido por sus sentidos y concebido como patrón de referencia, en lo que a geometría se refiere. Específicamente, el espacio que el cerebro capta en sus redes neuronales, es un espacio euclídeo tridimensional, comenzando con el hecho que, el hombre primitivo concibió al mundo plano, y no fue si no hasta hace poco que apareció la teoría (y solo la teoría) de que el mundo era redondo.

La mente humana asocia la realidad exterior a la noción de espacio que heredamos culturalmente, y como reflejo del entorno social y de nuestro hábitat, caracterizado primordialmente, por formas euclídeas como rectas, puntos, planos y sobre todo del espacio representado en habitaciones y albergues, donde trabajamos y vivimos, y que muestran, casi siempre, invariablemente, el espacio de un paralelepípedo rectangular. Este paralelepípedo se origina en la solución que el hombre dio al problema de la estabilidad de su morada, buscando permanencia y aprovechamiento del espacio

[2] PAREJA-HEREDIA, D. *Métricas, Geometrías y Trigonometrías*. Notas de una charla en el *Seminario Interno de Matemáticas.* Aparece en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

útil dentro de ella. Si la naturaleza no nos hubiese ofrecido la madera, nuestras viviendas tendrían formas diferentes, dependiendo de los materiales a nuestra disposición, si lo único disponible fuera la piedra nuestras viviendas tendrían formas esféricas, con arcos que repartirían el peso de su estructura sobre las paredes verticales que servirían de fundaciones para ella. Los esquimales, por ejemplo, que carecen de madera elaboran sus igloos en forma esférica y lo más seguro es que, ellos estén más familiarizados que nosotros con la geometría esférica.

Animales de distinta especie, siguen patrones de construcción de sus viviendas más apegados a la funcionalidad y al medio que los rodea que a condiciones de estabilidad o estética. Madrigueras construidas en forma cilíndrica o esférica son las más comunes. Los nidos son redondos y no cuadrados, el panal donde viven y trabajan las abejas está constituido por celdas hexagonales, etc. Otra razón importante para que nuestra geometría sea euclidiana es el hecho de que el principal sentido del hombre es la vista, y la vista o visión tiene en la luz el elemento básico que la sustenta, es decir, sin luz no hay visión. Hasta antes de que se formulara la teoría de la relatividad se creía que el rayo de luz tenía una trayectoria rectilínea y que la geometría de Euclides era la apropiada para modelar los problemas de la física. Aun hoy la mecánica clásica (la de Newton y Lagrange) usa la geometría de Euclides como un referente.

Que la luz sea un elemento importante, determina también la forma de nuestro hábitat. Es por eso que nuestras viviendas son como son y no piramidales, como debían ser, si buscáramos más estabilidad. La pirámide tiene su centro de gravedad más cercano al piso, lo que la hace más estable, comparativamente, con la vivienda de forma rectangular.

Las anteriores reflexiones sirven de motivación para explicar y justificar la demora en el descubrimiento de las geometrías no euclidianas. Hoy la teoría de la relatividad se desarrolla en el marco de la geometría de Riemann en razón a que ésta puede acomodarse más a la realidad del espacio físico, visto ya, no en la parte local, sino en una perspectiva global, donde la mecánica celeste actual, tiene sus dominios. En las variedades de las que hablamos al principio, las geometrías asociadas a ellas dependen de lo que entendamos por distancia. La escogencia de una fórmula para la distancia entre dos puntos, determina, no sólo la geometría, si no la forma de las geodésicas, esto es, las curvas que dan la menor distancia entre puntos. Estas geodésicas, sin embargo están en el espacio euclídeo y su estudio allí, nos permitirá indagar sobre los objetos geométricos en la variedad, que vemos retratados en los espacios euclídeos.

Bernhard Riemann (1826-1866). Sus ideas sobre análisis matemático y sobre geometría del espacio tuvieron un profundo efecto en el desarrollo de la física y de las matemáticas de nuestro tiempo.

Siguiente Sección: ***El Cálculo Infinitesimal. Antecedentes***