

“El logro de Gödel es singular y monumental...un hito que permanecerá visible en el espacio y en el tiempo”.

John von Neumann.



Kurt Gödel, en una fotografía con sus padres y su hermano mayor Rudolf, en 1910. En casa le apodaban “El niño preguntón”, o como es usual en alemán: “der Herr Warum”, el señor ¿por qué?

5.9 – Gödel y los Teoremas de Incompletitud.

Mencionábamos cómo, el teorema de incompletitud de Gödel sacudió los cimientos del programa formalista de Hilbert, y también el tipo de ajustes que debió hacerse, para que el programa no sucumbiera en su totalidad. El enfoque finitista de los razonamientos, evita entrar en las complejidades de lenguajes diferentes al de primer orden. Así, el formalismo quedaría aún siendo útil en ciertos aspectos del estudio de los fundamentos de las matemáticas.

Como preámbulo a la exposición de los teoremas de Gödel, bueno es que, le dediquemos unas líneas a la vida y obra del gran matemático y lógico austriaco.

APUNTES SOBRE LA OBRA DE KURT GÖDEL (1906-1978). Hace algunos años Martin Davis, escribía en las *Notices* de la *American Mathematical Society* (AMS)¹ unos comentarios sobre dos libros relativos a la vida y a la obra de Gödel de los cuales extraeré algunos apartes para incluir en estas notas. Igualmente el libro de Dawson², ahora en su segunda edición, es una magnífica fuente que nos ayudará a entender, la vida y la obra del matemático que cerró una época de gran actividad en el estudio de los fundamentos de las matemáticas.

¹ DAVIS, Martin, *Rev. Logical Dilemmas: The life and work of Kurt Gödel and Gödel: A life of logic*. Notices of the American Mathematical Society, Vol. 48, No. 8. September, 2001.

² DAWSON, J. W. Jr. *Logical Dilemmas. The Life and Work of Kurt Gödel*. A K Peters. Wellesley, Mass. 2005. La foto que encabeza esta sección es tomada de este libro (Pág. 2).

Digamos primero que Martin Davis es un matemático y lógico norteamericano cuya producción lógica es bien conocida. Davis, junto a Yuri Matyasevich, Julia Robinson e Hilary Putnam, pasarán a la historia de las matemáticas con el honor de haber resuelto el *Décimo Problema de Hilbert*. Este problema pregunta por la existencia de un algoritmo para decidir si una ecuación diofantina tiene o no solución. La respuesta resultó ser negativa. Martin Davis es profesor emérito del Instituto Courant de la Universidad de Nueva York.

El New York Times, finalizando el siglo XX, en una columna firmada por Douglas Hofstadter (el mismo de Gödel, Escher and Bach³), incluía, entre los más grandes científicos y pensadores del siglo XX, a Gödel, junto a Albert Einstein y a Alan M. Turing. Es interesante notar que Gödel y Turing ambos son lógicos o al menos son recordados por sus aportes a esa área del conocimiento; específicamente, a Gödel por su teorema de incompletitud y a Turing por el teorema sobre computabilidad y por las Máquinas de Turing.

Gödel en su infancia fue un niño demasiado inquisitivo, a tal punto que en su hogar lo nombraban con el mote de “der Herr Warum” (*el señor, por qué*). Nació en Brno, en aquella época, parte del imperio austro-húngaro, hoy ciudad perteneciente a la República Checa. En su infancia, adoleció de fiebre reumática, consecuencia de lo cual quedó hipocondríaco para toda la vida. Esto daría a su personalidad un comportamiento extraño, según lo manifiestan sus contemporáneos. La educación superior la adelantó en Viena en el área de las matemáticas. Fue estudiante del gran matemático y uno de los fundadores del *Círculo de Viena*, el profesor Hans Hahn. Posteriormente, él mismo Gödel sería miembro del *Círculo de Viena* al lado de Rudolph Carnap, Tarski, Neurath, Schlick, Wittgenstein, Popper, Kelsen y otros.

El *problema* que Gödel escogió para su trabajo de disertación, tenía que ver con *las reglas básicas de la deducción lógica que usan las matemáticas*; reglas estas, que habían sido desarrolladas formalmente por Gottlob Frege en su *Begriffsschrift* (ideografía o fundamentos) de 1879. El punto clave del descubrimiento de Frege fue que, además de las conectivas proposicionales, cuyas reglas habían sido ya descritas por Boole, era necesario usar los cuantificadores universal y existencial para descubrir la estructura lógica detrás de las proposiciones matemáticas.

Los pasos básicos en una prueba matemática pueden ser vistos entonces, en el nivel de aplicación de las reglas de manipulación de los símbolos lógicos y matemáticos. Estas reglas pueden darse de varias formas equivalentes, pero uno, usualmente no se preocupa por entrar en detalles. Burdamente hablando, los cuantificadores entran en juego cuando, las conectivas proposicionales así lo requieren. Una forma de describir estas reglas (los lógicos llaman a esto, *deducción natural*), es que las reglas especifican, cómo remover cuantificadores en forma segura, y de igual modo, reingresarlos en las proposiciones. Los matemáticos llevan a cabo estos procesos intuitivamente, y no necesitan conocer las reglas. Sin embargo estas reglas juegan un papel crucial cuando se trata de ser precisos, en la demostración de teoremas relacionados con lo que se

³ HOFSTADTER, D. R. *Gödel, Escher and Bach. An Eternal Golden Braid*. Basic Books. New York. 1979.

puede, o no se puede probar, es decir, en temas que tienen que ver con los fundamentos de las matemáticas.

El problema al que nos referíamos, fue propuesto por Hilbert en 1928 y hacía relación a la prueba de que las reglas lógicas propuestas por Frege eran completas en el sentido de que las inferencias deducidas de ellas eran válidas. Sintetizando en palabras de Gödel “Toda expresión lógica es satisfactible o refutable”⁴. La prueba de completitud de Gödel recurre a métodos familiares pero en forma muy recursiva. Sin embargo el teorema de indecidibilidad, que también toca el problema de incompletitud propuesto por Hilbert, usa métodos completamente nuevos.

El segundo de los famosos problemas de Hilbert de 1900, pregunta por una prueba de la consistencia de la aritmética. Trabajando con base en las ideas de Hilbert, investigadores como Ackerman, von Neumann y Herbrand intentaron hallar tal prueba para un sistema basado en las reglas de la lógica de Frege, con un lenguaje apropiado para la aritmética de los números naturales y con la formalización derivada de los axiomas de Peano. En el congreso mundial de matemáticos de Bolonia en 1928, Hilbert preguntaba por una prueba de que el sistema era completo en el sentido de que cada proposición expresable en su lenguaje debía ser probable o refutable en base a los axiomas de la teoría.

Lo que Gödel probó fue no sólo que estos sistemas son incompletos, si no que no hay esperanzas de lograr la completitud de la aritmética por medio de, aún más potentes sistemas. Finalmente, propinó el golpe mortal a los esfuerzos para probar la consistencia de la aritmética, al mostrar que los sistemas formales en general, no estaban en capacidad de probar su propia consistencia.

Consecuencia de la sensación y la fama que generaron los resultados alrededor del teorema de incompletitud de Gödel en medios intelectuales, fue la invitación al mismo Gödel a formar parte del recién creado, Instituto de Estudios Avanzados de Princeton en el año 1933. En diciembre de ese año en una conferencia en el congreso conjunto de la MAA y la AMS⁵ en Cambridge, Massachusetts, titulada “El estado actual de los fundamentos de las matemáticas”, Gödel sostenía que la solución al problema de dar una fundamentación a todas las matemáticas, que evitara las paradojas tipo Russell, habría que buscarla tomando por marco de referencia, los conjuntos organizados jerárquicamente; en niveles o tipos. Comenzando desde abajo, con un conjunto de “individuos”, luego en el siguiente nivel, estos individuos junto a los conjuntos formados por estos individuos. Cada nuevo nivel se forma con los elementos del nivel que le precede adjuntando los conjuntos formados con los conjuntos de elementos de este nivel previo. De esta manera uno construye una estructura en forma de V, cuyo elemento en el vértice inferior denotado V_0 puede tomarse como \emptyset (el conjunto vacío), luego V_1, V_2, \dots , pero como Gödel enfatizó, no hay razón para detenerse allí. Podemos seguir adelante con:

$$V_\omega = \bigcup_{n=0}^{n=\infty} V_n$$

y continuar el proceso.

⁴ RAWSON, J. W. *Opus cit.* Pág. 54.

⁵ *Mathematical Association of America y American Mathematical Society*, respectivamente.

Es claro que $V_n \subseteq V_{n+1}$. Pero el proceso puede continuar con $V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega)$, donde \mathcal{P} significa el conjunto potencia, esto es, el conjunto formado con los conjuntos de V_ω , tomados aquí como elementos.

En la teoría de conjuntos contemporánea esta jerarquía aun se extiende de forma que los subíndices de V varíen en ordinales λ de mayor orden. Gödel explicó en aquella ocasión que una fundamentación para las matemáticas dependería de los axiomas para esta jerarquía de tipos, con las reglas de inferencia de la lógica de Frege usadas para probar teoremas con base en estos axiomas. También, un sistema de axiomas para la teoría de conjuntos puede entenderse que depende de propiedades de clausura, que garanticen el proceder, de la existencia de conjuntos dados, a la existencia de otros conjuntos formados por ellos. Al formar el menor conjunto cerrado con relación a estas operaciones de la jerarquía, uno obtiene un conjunto que pertenece a la jerarquía; sin embargo, la existencia previa de este conjunto no podría probarse con el soporte de estos axiomas. Esto es así porque uno podría recurrir a la existencia de este conjunto para probar la consistencia de los axiomas dados en razón a estos mismos axiomas, lo cual había demostrado Gödel que era imposible. Este conjunto puede considerarse como un nuevo dominio de individuos y tomarse como punto de partida para crear nuevos tipos de mayor jerarquía. Gödel en su conferencia, continúa explicando la relación entre esta situación y el teorema de incompletitud en los siguientes términos:

“... estamos enfrentados a una extraña situación. Frente al reto de encontrar un sistema formal para las matemáticas; encontramos un infinito número de sistemas, y en cualquiera de ellos que se escoja..., hay otro...cuyos axiomas son más fuertes. Pero... este carácter de nuestro sistema... está en perfecto acuerdo con ciertos hechos, los cuales pueden establecerse independientemente... Para cualquier sistema formal se puede construir una proposición – en efecto – de la aritmética de los naturales la que es ciertamente verdadera si el sistema dado está exento de contradicciones, pero no puede probarse en el mismo sistema. Ahora si el sistema en consideración (llamémoslo S) se basa en la teoría de tipos, resulta que... esta proposición llega a ser un teorema probable si adicionamos a S el siguiente tipo de mayor jerarquía y los axiomas correspondientes”⁶

Gödel también trabajó en la década del treinta del siglo pasado en la hipótesis del continuo de Cantor (CH).

HIPÓTESIS DEL CONTINUO O HIPÓTESIS DE CANTOR.

Esta hipótesis afirma que *los conjuntos infinitos de números reales vienen solamente, digámoslo así, en dos tamaños: cada uno de estos conjuntos es contable (finito o enumerable) o tiene la misma cardinalidad de todo el conjunto de los números reales.* Mencionábamos antes que esta hipótesis, muy trabajada por Cantor, encabezaba la lista de los famosos veintitrés problemas de Hilbert.

⁶ GÖDEL, K. *Collected Works* (FEFERMAN, S. et al. eds.). Vol. II. Oxford University Press. 1990.

Gödel fue capaz de probar que si los sistemas usuales de axiomas de la teoría de conjuntos (incluyendo, en particular, los llamados axiomas de Zermelo-Fraenkel) son consistentes, entonces ellos permanecen consistentes si el axioma de elección y CH se agregan a estos sistemas.

La principal herramienta para la prueba del anterior resultado es una modificación de la jerarquía acumulativa, discutida arriba. El lenguaje de la teoría de conjuntos (que como recordarán incluye el lenguaje de la lógica) puede usarse, no sólo para expresar proposiciones, si no también para definir conjuntos. Por ejemplo, la fórmula

$$\neg(\exists y)(y \in x) \vee [(\exists y)(y \in x) \wedge (\forall z)(z \in x \supset \neg(\exists y)(y \in z))]$$

Se satisface solamente si x es el conjunto vacío o x es el conjunto cuyo único elemento es el conjunto vacío. Uno dice que esta fórmula define al conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. En general, dado cualquier conjunto S , uno puede considerar subconjuntos de S definibles por fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos. Las fórmulas usadas para estas definiciones permiten allegar *parámetros* que representan elementos particulares de S . Así, si $S = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. La fórmula $x = \{\emptyset\}$, que contiene el parámetro $\{\emptyset\}$ define el subconjunto $\{\{\emptyset\}\}$ de S .

Vamos a escribir $\mathcal{D}(S)$ para denotar la colección de todos los subconjuntos de un conjunto dado S , que pueden definirse de esta manera (a través de fórmulas bien formadas en el lenguaje de la teoría de conjuntos). Evidentemente, para cada conjunto S , $\mathcal{D}(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$. Notemos que si S es contablemente infinito, esta inclusión es propia: $\mathcal{P}(S)$ es incontable (en efecto tiene la cardinalidad del continuo), mientras que, puesto que sólo hay un número contable de fórmulas, $\mathcal{D}(S)$ es contable. Ahora, justamente, como la jerarquía acumulativa está definida por reiteraciones, indefinidamente del operador potencia \mathcal{P} , Gödel define lo que él llama conjuntos construibles, como aquellos que se obtienen empezando con \emptyset , e indefinidamente iterando el operador \mathcal{D} . La definición precisa se logra por recursión transfinita:

$$L_0 = \emptyset, \quad L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha) \quad L_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha \quad (\text{donde } \lambda \text{ es un ordinal límite})^7.$$

Los conjuntos construibles son aquellos que pertenecen a alguno de estos L_α . Gödel introdujo la proposición siguiente:

A: *Todo conjunto es construible.*

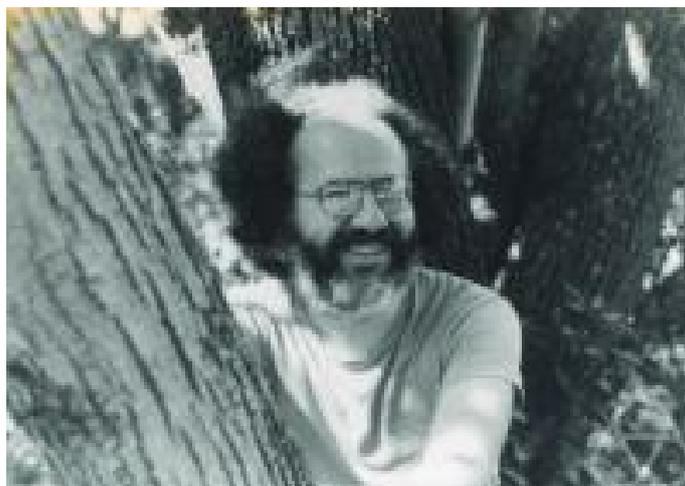
Y probó lo siguiente:

- i) **A** es consistente con ZF
- ii) **A** implica el axioma de elección
- iii) **A** implica CH

⁷ Una concepción actual de este procedimiento puede verse en: MYCIELSKI, J. *A system of Axioms of Set Theory for the Rationalists*. Notices of the AMS. Vol. 53, No. 2. February 2006.

iv) **A** implica que $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Este resultado se conoce como la hipótesis generalizada del continuo (GCH).

En el anuncio de este resultado Gödel decía en 1938 “la proposición **A**, adicionada como un nuevo axioma parece dar una complementación general a los axiomas de la teoría de conjuntos, al menos, hasta cuando se determine, en forma definitiva, *el concepto vago de, conjunto infinito arbitrario*.”



Martin Davis (1928-) en Berkeley California, donde reside actualmente⁸. Davis es profesor emérito de la Universidad de Nueva York. Conocido por sus importantes trabajos en teoría de computación y por ser copartícipe en la solución del décimo problema de Hilbert. Martin Davis fue discípulo del gran lógico americano Alonzo Church y desciende intelectualmente de Euler por la rama de la escuela francesa de Michel Chasles⁹.

Siguiente Sección: *La Filosofía de las Matemáticas después de Gödel*

⁸ Foto tomada del archivo del Instituto de Matemáticas de Oberwolfach: <http://www.mfo.de/>

⁹ Para una revisión genealógica visitar: <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/html/id.phtml?id=8018>