"El descubrimiento de los números irracionales marca un hito fundamental en la historia de las matemáticas". H. Eves.

2.4 El problema de la inconmensurabilidad

El programa pitagórico dentro de la geometría, tenía como objetivo asociar, a entes geométricos, valores numéricos. Empezando por la escogencia de una unidad de medida, asociaron a cada segmento un número, su longitud. El siguiente paso fue asociar con cada par de segmentos la razón de sus longitudes. Este proceso requería que los segmentos en cuestión fueran *conmensurables*, en el sentido de poder encontrar un tercer segmento que los midiera en unidades enteras. El problema de la inconmensurabilidad fue el detonante para que explotara el gran problema de la insuficiencia de los números naturales en la representación de magnitudes geométricas y como consecuencia de ello buscar alternativas nuevas para asociar estas magnitudes a números de otra especie. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $(1 + \sqrt{5})/2$, conocidos desde tiempos griegos, son ejemplos de números irracionales, es decir, cantidades no expresables como cocientes de números enteros. Para entender el por qué de la aparición de los números irracionales tendremos que empezar por entender que consideraban los griegos por conmensurabilidad.

Definición: dos segmentos *AB* y *CD* son conmensurables, si existe un tercer segmento (unidad), digamos **UN,** tal que:

$$l\,(AB) = m\,l\,(\mathbf{UN}),\ \text{ y, }\ l\,(CD) = n\,l(\mathbf{UN}), \qquad \textbf{(1)}$$

donde m y n son números naturales y "*l*" en este caso significa longitud.

El *logos* (o la *ratio* en latín) de dos segmentos, para los pitagóricos, estaba representado por el cociente, o por el número racional definido por:

$$\frac{lAB}{lCD} = \frac{m}{n}$$

Observe que la razón *m/n,* es un número desprovisto de cualquier alusión a las magnitudes de los segmentos y así podrá usarse para representar otras relaciones ya sea de área, de volumen, o de lo que sea. Esta particularidad de los números era vista por los pitagóricos como la esencia que se preserva después del cambio.

La gráfica de la figura 2.4.1 muestra el caso de un segmento unitario **UN** y los segmentos conmensurables *AB* y *CD*, con, $m = 2$ y $n = 3$.

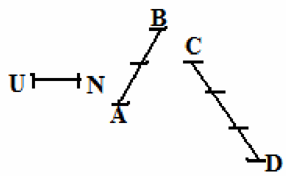

Fig. 2.4.1. Los segmentos AB y CD son conmensurables porque UN los mide en unidades enteras. Su razón *m/n* en este caso es 2/3. Es claro que 2/3 no hace ninguna alusión a las longitudes de los segmentos: es sólo un número.

Cuando este es el caso, se dice que los segmentos *AB* y *CD* son conmensurables (o medibles) y están en la razón *m : n*. En lenguaje pitagórico, el *logos* (o la *ratio*, en latín) de los dos segmentos es *m/n*. Para nosotros los dos segmentos están asociados al número racional, o a la razón, *m/n*. También, esta razón esta asociada a un proceso aritmético como es la división algorítmica de *m* entre *n* que da origen a un número racional y que uno expresa como una expansión decimal periódica. Por ejemplo 2/3 = 0.75 = 75/100, ó, 2/3 = 0.666…. Sin embargo para los pitagóricos y en general para los matemáticas griegos, el proceso de saber si dos segmentos son conmensurables o no, era la aplicación del llamado *Algoritmo de Euclides*, que consiste en dividir la magnitud mayor entre la menor y encontrar un cociente, digamos c_1 y un residuo r_1, la magnitud menor se divide entre este residuo para hallar un cociente c_2, y así continuar hasta obtener un cociente c_n. Si este proceso termina después de un número finito de pasos los segmentos son conmensurables, en otro caso los segmentos se dicen inconmensurables.

Definición. Si para los segmentos **AB** y **CD**, no existen enteros positivos **m** y **n**, que satisfagan **(1),** se dice que los segmentos son *inconmensurables* y en este caso el número asociado a ellos, se define como un ***número irracional***.

Cuando se establece la razón de los segmentos, estos pierden su importancia y es el logos, todo lo que queda después de que los segmentos desaparecen. Vista a la luz de las matemáticas actuales, esta razón genera toda una familia de cocientes del tipo *km/kn***,** donde $k \neq 0$ es entero, con la propiedad que, cualquier par de elementos de la familia, son iguales entre si. Esto permite generar la clase de equivalencia {**m/n**}, en el sentido de que los elementos de estas clases satisfacen las ya mencionadas propiedades: reflexiva, simétrica y transitiva.

En general, cada clase de éstas, tiene su representación en el racional *m/n*, $n \neq 0$, es decir, el papel que jugaban las rectas que representaban, en el plano proyectivo a las demás rectas, aquí lo juegan los racionales *m/n*, donde *m* y *n*, son enteros, primos relativos[1] y $n \neq 0$. En la geometría proyectiva las clases de equivalencia de las rectas paralelas generan la recta en el infinito, ahora las clases de equivalencia de los *logos* (*ratios*) ***da origen al conjunto Q de los números racionales***.

La igualdad de dos elementos (razones) en una de estas clases, se llama una ***proporción***. Por ejemplo, en la clase **{1/2} =** {… -2/-4, -1/-2, ½, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, 6/12, … }, se cumple que 2/4 = 6/12. En general si *m/n* y *j/k* están en la misma clase, se sigue que: *m/n = j/k* y consecuentemente *mk = nj*. Al interior de estas clases de equivalencia se puede con sus elementos, elaborar una pequeña algebra. Por ejemplo, de, 2/*x* = 6/12, se sigue que x = 24/6 = 4 y sustituyendo queda, 2/4 = 6/12, lo cual es correcto.

Otra forma de expresar que *a/b y c/d* están en la misma clase, es decir que, los números *a, b, c* y *d* están en la proporción, *a:b* :: *c:d*, (se lee *a* es a *b* como *c* es a *d*). En este caso *a* y *d* se llaman extremos, *b* y *c* se llaman medios. De la definición se sigue que: el producto de medios es igual al producto de extremos. En particular, si desconocemos un término de la proporción, digamos *x*, en *a:x* :: *c:d,* o en notación moderna, *a/x = c/d,* encontramos que *x =ad/c*. Cuando se cumple que *a/x = x/d*, a *x* se conoce como media proporcional entre *a* y *d*. De aquí se puede despejar *x,* y encontramos que la media proporcional entre *a* y *d* es: $x = \sqrt{ad}$. A este, valor se conoce también como la media geométrica entre *a* y *d*, que contrasta con la media aritmética de *a* y *d* que se define como (*a*+*d*)/2.

[1] Recordemos que dos números *n* y *m*, son primos relativos si ellos no tienen factor común diferente a la unidad, esto se denota simbólicamente como (*m, n*) = 1 y se lee “el máximo común divisor de *m* y *n* es 1”.

De otro lado, en la clase de equivalencia $\{\boldsymbol{m/n}\}$ estará la razón y/x siempre que: $m/n = y/x$, o sea $y = f(x) = (m/n)x$. Dando el salto a la geometría analítica (Figura 2.4.2), esto no es otra cosa que, la ecuación de la recta que pasa por el origen y con pendiente m/n. De aquí se sigue que nuestra clase de equivalencia $\{\boldsymbol{m/n}\}$ tiene su representación en los puntos de la recta que pasa por el origen, con coordenadas enteras del tipo (kn, km), donde k es entero y diferente de cero.

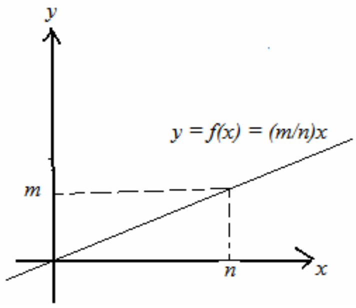

Fig. 2.4.2. La recta con ecuación $y = f(x) = (m/n)x$, tiene pendiente m/n. En esta recta caen todos los puntos con coordenadas enteras (a, b), cuando b/a está en la clase de equivalencia $\{\boldsymbol{m/n}\}$.

La función, $y = f(x) = (m/n)x$, representa una recta en el plano, que pasa por el origen y con pendiente m/n. Esta es la razón para que f lleve el nombre de función lineal. En esta pequeña álgebra que se hace con la función lineal, se fundamenta la regla de tres simple directa, que nos enseñan en la primaria y el bachillerato. *Ejemplo*: Si Juanita compra 6 lápices por \$5100, ¿Cuánto le costarán 8 lápices? Aquí nuestra clase de equivalencia contiene la fracción 5100/6 y la fracción $x/8$. Por estar en la misma clase se cumple que $5100/6=x/8$, y puesto que producto de extremos es igual a producto de medios, concluimos que $x = 8 \times 5100/6 = 6800$. Concluimos que a Juanita le costará \$6800 comprar los 8 lápices. En la función lineal descrita quedan incluidos todos los problemas de regla de tres simple directa.
Cuando se toma:

$$y = f(x) = (m/n)x + k,$$

y hacemos variar el parámetro k en **R** (los números reales), las rectas cubren todo el plano formando la familia de rectas paralelas a la recta de pendiente m/n. Note de nuevo el parecido con la geometría proyectiva en la cual una recta $\boldsymbol{l}$ identifica a todas las rectas paralelas a ella, y aquí la recta de pendiente m/n representa a todas las rectas paralelas que tocan al eje $\boldsymbol{y}$ en el número k (Fig. 2.4.3).

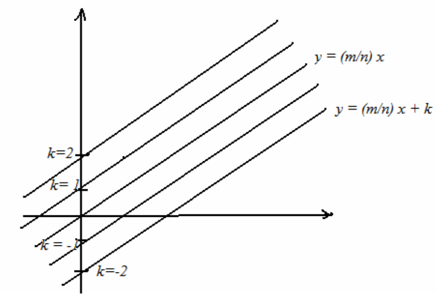

Fig. 2.4.3. Dada la recta $\boldsymbol{l}$ de ecuación, $y = f(x) = (m/n)x$, y pendiente m/n, el conjunto de todas las rectas paralelas a ella que tocan al eje $\boldsymbol{y}$ en el punto $y = k$, forman lo que se llama en geometría proyectiva el plano reglado generado por la recta $\boldsymbol{l}$. El punto común a estas rectas es el punto en el infinito. Así cada racional m/n induce en el plano una familia de rectas o un haz de rectas paralelas.

La posición filosófica sostenida por los pitagóricos de que todo, y en particular la geometría, puede llevarse al logos, entendido como cociente de enteros, pierde su validez al descubrir que dos segmentos muy familiares como son la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. En este punto de la historia aparece la primera crisis en la fundamentación de las matemáticas al descubrir que los números naturales y sus logos no son suficientes para caracterizar los entes geométricos. Esta crisis induce el nacimiento de una nueva familia de números, los números irracionales que van a complementar a los racionales para formar lo que hoy conocemos como el conjunto de los números reales.

La prueba de la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado llegó a nosotros, según Popper[2], en la obra de Aristóteles, los *Primeros Analíticos*. La prueba es un ejemplo de una demostración indirecta, o demostración por reducción al absurdo, en la cual se niega la proposición que se quiere probar, y si suponiendo esto, se llega a una contradicción, concluimos que la hipótesis es falsa o sea que nuestra proposición inicial es verdadera. En cálculo proposicional la demostración se reduce a la siguiente tautología:

$$(\mathbf{p} \Rightarrow (\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{r})) \Rightarrow \neg \mathbf{p}$$

Tomando: **p** = La diagonal y el lado del cuadrado son conmensurables.
$\neg$**p =** La diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables.

Debemos hallar la contradicción **(r $\wedge$ $\neg$r)**, partiendo de **p,** para que quede probada $\neg$ **p**.

Formalicemos nuestra proposición en el siguiente teorema:

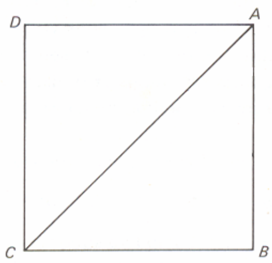

***Fig.* 2.4.4**. La diagonal y el lado en este cuadrado son inconmensurables.
Es decir, no hay unidad que mida a las dos longitudes exactamente en unidades enteras.

Teorema. En el cuadrado ABCD (*fig.* 2.4.4), la diagonal AC y el lado AB son inconmensurables.

Demostración. Sean l(AB) y l(AC), las longitudes del lado y la diagonal del cuadrado, respectivamente.
Neguemos la conclusión del teorema, o sea, supongamos que la diagonal y el lado del cuadrado si son conmensurables. Por definición existen números enteros **m** y **n**, tales que l(AC) **= m** y l(AB) **= n**. Se sigue que:

$$l(\mathrm{AC}) \,/\, l(\mathrm{AB}) = \mathbf{m} / \mathbf{n} \qquad \mathbf{(2)}$$

[2] POPPER, K. R. *The Open Society and its Enemies*. Vol. 1. Princeton University Press. Princeton, NJ. 1971. Pág. 249.

Donde l representa longitud. Supongamos que la fracción **m/n** (el *logos* de los dos segmentos), identifica la clase {**m/n**}, es decir, la fracción es irreducible. Esto significa que **m** y **n** no tienen factor común distinto a la unidad, en particular, si uno es par el otro es impar y viceversa. Elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad (**2**), da:

$$l^2(AC) / l^2(AB) = \mathbf{m^2/ n^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Por el teorema de Pitágoras, aplicado al cuadrado de la *figura* 2.4.4, $l^2(AC) = 2l^2(AB)$. Reemplazando en (3), llegamos a

$$2 = \mathbf{m^2/ n^2}, \text{ o sea, } \mathbf{m^2} = 2\ \mathbf{n^2} \qquad \textbf{(4)}$$

De (**4**) se sigue que **m²** es par y por consiguiente **m** es también par. Puesto que **m** y **n** tienen distinta paridad, **n** tiene que ser impar. Por otro lado, al ser **m** par, es de la forma **m** = 2**k.** Reemplazando en (**4**), obtenemos, $4\mathbf{k}^2 = 2\mathbf{n}^2$.

Simplificando queda, $\mathbf{n}^2 = 2\ \mathbf{k}^2$. Esto implica que **n** es par y así **m** debe ser impar. El razonamiento nos lleva a que **m** y **n** son a la vez pares e impares. Esta contradicción demuestra que (**2**) es falso, o sea que no hay enteros que cumplan esta condición. En este ejemplo, la contradicción (**r** ∧ ¬**r**), se da tomando **r** = "**m** es par", (o también, tomando "**n** es par").

El teorema muestra que, la diagonal y el lado de un cuadrado son inconmensurables. Dicho en otros términos, no hay ningún segmento, que mida en unidades enteras, al lado y a la diagonal de un cuadrado.

Cuando el lado del cuadrado tiene longitud unidad, el teorema muestra que, $\sqrt{2}$ no puede expresarse como cociente de enteros, o sea que $\sqrt{2}$ es irracional.

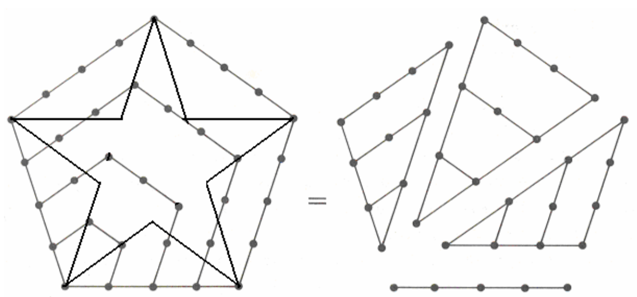

Fig. 2.4.5. *Números pentagonales en sucesión, la estrella de cinco puntas y un número Pentagonal como suma de números triangulares más n* (cuando *n* = 5). La estrella de cinco puntas sirvió de amuleto distintivo a los miembros de la escuela pitagórica.

Sorprende saber que, los pitagóricos no hubiesen descubierto la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado del pentágono regular, sabiendo que la estrella de cinco puntas (el *Pentáculo*, según lo nombran en el *Código Da Vinci*[3],), símbolo de su hermandad, resulta de las diagonales del pentágono regular (Fig. 2.4.5). La razón de estas longitudes es el número irracional $(1 + \sqrt{5})/2$, conocido como la razón áurea y estudiado por Euclides en los *Elementos*. Este número está presente en varias partes

[3] BROWN, D. *El Código da Vinci*. Ediciones Urano S. A. Barcelona. 2004.

de de las matemáticas. En teoría de números aparece en relación con la sucesión de Fibonacci, para la cual tenemos que,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = (1 + \sqrt{5})/2.$$

La extensión del concepto de *proporción* que incluye a los números irracionales, la hicieron, el pitagórico Arquitas de Tarento, colega de Platón, y con gran profundidad, el discípulo de este último, Eudoxio, cuyo trabajo quedó incluido en el libro V de los *Elementos*. Eudoxio fue un maestro en el arte de lo que hoy conocemos como el método dialéctico, o del uso de la razón para investigar no sólo las matemáticas y la naturaleza del hombre, si no también para explicar su entendimiento y la búsqueda de la verdad. El método de prueba por reducción al absurdo, iniciado primero por la escuela de los sofistas, tuvo en las matemáticas, particularmente en las desarrolladas por Eudoxio, Euclides y Arquímedes, una herramienta fundamental en la prueba de teoremas. Otra muestra de este método la da Euclides en los Elementos, cuando prueba el siguiente teorema:

Teorema (*Infinitud de los primos*)**.** El conjunto de los números primos es infinito.
Demostración. Supongamos lo contrario: El conjunto **P** de números primos es finito, digamos **P** = $\{2, 3, 5, \ldots, p\}$, donde p es el mayor de todos los primos.
Consideremos el número $q = (2\times 3\times 5\times \ldots \times p) + 1$.
Es claro que el máximo común divisor de p y q es 1, porque p es primo y q no se deja dividir por ninguno de los primos 2, 3, 5,…, p. En nomenclatura moderna, uno dice que p y q son coprimos. Por lo tanto q es primo, o tiene un factor primo mayor que p. En ambos casos hay un primo mayor que p. Esta es una contradicción porque supusimos que p era el mayor primo. En consecuencia hay infinitos primos.

La definición general de *proporción* originada en los trabajos de Eudoxio, la presenta Euclides en el libro V en los siguientes términos[4]:

Definición 5. *Se dice que varias magnitudes están en la misma razón, la primera es a la segunda, la tercera es a la cuarta, cuando, un equimúltiplo, cualquiera que se tome, de la primera o de la tercera, y cualquier equimúltiplo de la segunda o de la cuarta, los primeros equimúltiplos en su orden exceden, igualan o son menores que los equimúltiplos de los segundos, respectivamente.*

En notación moderna la definición 5, quedaría así: $a:b :: c:d$, significa que para m y n enteros positivos.

$na > mb$ implica que $nc > md$
$na = mb$ implica que $nc = md$
$na < mb$ implica que $nc < md$

El camino iniciado por Eudoxio en el siglo IV AC, sólo vino a continuarse en el siglo XIX con los trabajos del matemático alemán, Richard Dedekind (1831–1916), quien con las *Cortaduras* que llevan su nombre, dio carta de naturaleza en las matemáticas modernas, a los números irracionales. Este tema lo tocaremos más en detalle cuando estudiemos los fundamentos de las matemáticas.

Siguiente Sección: ***Los Números Naturales***

[4] Ver Van der Waerden, *Opus cit.* Pág. 90.