Las matemáticas son el más brillante ejemplo de cómo, la pura razón, exitosamente puede, sin el recurso de la experiencia, engrandecer sus dominios. I. Kant.

1.3 Definición de Verdad tipo Tarski.

Una definición de verdad tipo Tarski, puede explicarse teniendo en mente que la verdad es relativa a un modelo ***M*** y a una valuación ***v***. Sin embargo el alcance introductorio de estas notas no permite llegar a un estudio detallado de la concepción que origina este tipo de definiciones. No obstante, en relación con la prueba de la paradoja de Epiménides el mentiroso (Capítulo V) describiremos un modelo donde la paradoja es falsa. Tarski probó que dadas ciertas condiciones, una definición de verdad para un lenguaje, sólo puede darse en un metalenguaje; en particular, la más importante característica de las definiciones de verdad tipo Tarski para lenguajes de primer orden, es que éstas, están formuladas en un lenguaje de segundo orden. Esto corresponde al famoso *resultado de imposibilidad de Tarski*. Dicho burdamente, la verdad no puede definirse en el mismo lenguaje en el que los enunciados están propuestos. Resaltemos aquí que, estos trabajos de Tarski están relacionados con los famosos teoremas de incompletitud de Gödel, que estudiaremos en detalle más adelante.

Como dice Tarski[1] "Este problema [la definición de verdad], que pertenece a los interrogantes de la filosofía clásica, engendra considerables dificultades" y es por esto que él recurre a los lenguajes formalizados y a la lógica moderna para lograr una aproximación al concepto de enunciados verdaderos. En lenguaje coloquial, la definición se da usualmente en términos semánticos, como algo del tipo:

Un enunciado verdadero es aquel que afirma que las cosas son así y así, y en efecto las cosas son así y así.[2]

No es la mejor forma de definir la verdad, pero para el individuo corriente es intuitivamente claro. Esta forma de definir el concepto de verdad ya está presente en Aristóteles cuando en la *Metafísica* afirma: "Decir que algo es lo que no es, o, decir que algo no es lo que es, es falso, mientras decir que algo es lo que es o que algo no es, lo que no es, es verdadero". Esta forma de definir "verdad" no satisface las condiciones de rigor y precisión que busca la lógica moderna y es por esto que Tarski busca a través de lenguajes formalizados una definición de verdad que se acomode a nuevos criterios de exigencia[3].

Las definiciones de verdad son importantes por diferentes razones. Sin las noción de verdad hay pocas esperanzas de capturar conceptos básicos de la lógica como son: validez (Verdad en cada modelo) y consecuencialidad lógica. Simplificando; la idea de verdad de Tarski, aplicada a una frase S es que, el conocer las condiciones de verdad de S, es conocer el significado de S (semántica). Porque, lo que nuestra frase afirmante S acierta decir, cuando la exclamamos, puede ser parafraseada, diciendo que, lo que S establece, es que sus condiciones de verdad se satisfacen. Algunos filósofos se han atrevido a criticar las definiciones de verdad tipo Tarski porque según ellos, se apoyan ilícitamente en el concepto de significado. Este apoyo en efecto se da, pero no es ilícito por no ser circular. El proyecto de Tarski es, nada más ni nada menos, que definir las condiciones de verdad en términos del significado de los símbolos, esto es, el significado de las frases en términos del significado de sus símbolos. No hay nada de equivocado en este intento.

---

[1] TARSKI, A. *Logic, Semantics, Meta-mathematics.* Hackett Publishing Company. 1983. Capítulo VIII, pág. 152.
[2] Ibid. Pág. 155.
[3] Una definición de lenguaje formalizado y algunos ejemplos los estudiaremos en la Sección 5.9, *Hilbert y el Formalismo.*

Los resultados negativos de Tarski y Kurt Gödel (1906-1978) han tenido implicaciones mayores en la filosofía y en otras áreas teóricas generales. La no definibilidad de tales conceptos metalógicos, como verdad, validez y consecuencialidad lógica en la lógica de primer orden, muestra que la lógica ordinaria de primer orden, **no** es, en un sentido importante, autosuficiente. Esta falla ha generado en filósofos y lógicos, diferentes posturas, unos proponen tomar la metalógica como una disciplina pura y autónoma, sosteniendo que ésta, está en el campo de la teoría de conjuntos y consecuentemente es una disciplina inmersa en las matemáticas. Para Hilary Putnam (1926-) la lógica debe incluir las lógicas de orden superior y por supuesto, por implicación, ser parte de la teoría de conjuntos. En general, el resultado de Tarski parece confirmar nuestros peores presentimientos acerca de la dependencia de la teoría de modelos de las lógicas de orden superior y así de cuestiones relacionadas con conjuntos y con su existencia.

Para Hintikka, la aparente dependencia de las definiciones de verdad tipo Tarski, de la teoría de conjuntos es uno de los aspectos más desconcertantes de la escena actual de la lógica y de los fundamentos de las matemáticas a tal punto de calificar este resultado como, *la maldición de Tarski*. Esto trasfiere a la teoría de modelos toda la problemática y las incertidumbres de los fundamentos de la teoría de conjuntos. En general, la maldición de Tarski podría entenderse como la no definibilidad de verdad para un lenguaje, en el mismo lenguaje (dadas las asunciones de Tarski). La importancia de este resultado negativo no puede desconocerse. Una de las primeras víctimas, fue la visión, originada en Rudolph Carnap (1898-1970) de crear un grandilocuente lenguaje universal, donde las técnicas de formalización de Hilbert y Gödel nos permitieran discutir su propia semántica. En una perspectiva más general, el resultado de *no definibilidad de Tarski*, da a cada especialista de la teoría de modelos y a la mayor parte de los teóricos en semántica una mala conciencia intelectual. Las consecuencias del resultado de Tarski, podrían tocar también a nuestro lenguaje coloquial, o de uso corriente, en el sentido de que aún en él, no tendríamos una definición lógica de verdad. La característica de nuestro lenguaje es su universalidad, por lo tanto no hay lenguajes de mayor orden en donde se tenga la posibilidad de definir ese concepto de verdad de tipo Tarski para este lenguaje universal.

Más generalmente, la *no definibilidad de verdad*, puede ser considerada una instancia paradigmática de la importante, pero frecuentemente desconocida, asunción de la inefabilidad (no explicable con palabras) de la semántica. Con esto estamos significando que la semántica no es susceptible de definición. En pocas palabras es como tratar de responder a la pregunta ¿*Qué significa, significa*? Es relevante destacar que esta asunción dominó el comienzo del desarrollo teórico de la lógica contemporánea. Esta visión fue compartida entre otros por, Gottlob Frege (1848-1925), Ludwig Wittgenstein (1889-1951) y el Círculo de Viena durante los años de "el discurso de modalidad formal", Willard Quine (1908-2000) y Alonzo Church (1903-1995). La idea de la inefabilidad de la semántica ha sido sostenida por Hintikka en el sentido amplio, que incluye el soporte de la metodología del enfoque hermenéutico (interpretativo) y desconstructivista de la filosofía. Un gran peso recae en la cuestión de la definibilidad de verdad, especialmente sobre la cuestión de si podemos definirla para un lenguaje realista usual, dentro de ese mismo lenguaje.

Se piensa generalmente que todo lo que no es problemático a la lógica (al menos a la clase de lógica que el matemático tiene ocasión de usar) es lógica de primer orden. Todo lo demás depende de una teoría de conjuntos, formulada como una teoría axiomática de primer orden. Pero la teoría de conjuntos no es una parte de la lógica, si no más bien, una parte de las matemáticas y así no puede ofrecer una base absoluta para el resto de las matemáticas, ya que ella misma lleva el peso de todos los problemas de existencia de los conjuntos.

El objetivo de Hintikka en la obra *Principles of mathematics Revisited*, en que se fundamentan estas notas, es mostrar que este panorama sombrío en el que se debate la lógica contemporánea, puede aclararse un poco usando su programa orientado a esclarecer las ideas que tenemos en torno a conceptos tan cruciales como *verdad* y *definición de verdad* y revisar algunas ideas comunes que manejamos en torno a la semántica y a los fundamentos de la lógica.

El resultado de la no definibilidad de verdad se suma a resultados negativos como el teorema de incompletitud de Gödel[4] y el teorema de Lindström (1969), según el cual no puede haber una lógica más fuerte que la lógica de primer orden (que satisface ciertas condiciones), con condiciones atractivas como aquellas de la lógica de primer orden, especialmente compacidad y la propiedad Löwenheim-Skolem[5]. Tales resultados negativos han dominado el pensamiento de los filósofos de las matemáticas en las últimas décadas.

Una tercera función de la lógica en las matemáticas (además de las mencionadas *descriptiva* y *deductiva*) es la relacionada con su uso medial (como un *médium*) para la teoría axiomática de conjuntos. Esta teoría de conjuntos se supone que va a servir de marco universal de referencia, para todas las matemáticas. Esta concepción de la teoría de conjuntos, como la *lingua universalis* (o al menos como *lingua franca*) de las matemáticas, no es universalmente aceptada, y es en el mejor de los casos, causante de espinosos conflictos.

La concepción actual de la teoría de conjuntos como teoría axiomática y deductiva, es muy diferente de la concepción que prevalecía anteriormente. Matemáticos como David Hilbert, imaginaron a la teoría de conjuntos, no como una teoría entre muchas, si no más bien como una súper teoría, una teoría de todas las teorías, pensada más en el sentido modal (model theoretical) que en el sentido deductivo.

Por razones enfatizadas con tanta fuerza por Tarski, la concepción de una teoría y un lenguaje universal para todas las matemáticas, está erizada de serios problemas. Comenzando por el duro revés de que una teoría universal debe ser inevitablemente incompleta en el aspecto deductivo como lo demostró Gödel con sus teoremas de incompletitud. Desde luego que la teoría axiomática de conjuntos es inevitablemente incompleta deductivamente. Por esta incompletitud, las asunciones necesarias para determinar la existencia de conjuntos son en extremo, recursivas.

Sin embargo, este no es el fin de las penas por las que atraviesa la teoría axiomática de conjuntos. La escena de horror total, no se revela si no hasta que estamos bien cerca a las diferentes nociones de completitud e incompletitud y verlas aplicadas entonces a la teoría axiomática de conjuntos.

En general, aunque no universalmente aceptado, se piensa que las dificultades en los fundamentos de las matemáticas, están en los problemas de existencia de ciertos conjuntos, o más ampliamente, en creer en que: ***el verdadero núcleo de las matemáticas es la teoría de conjuntos.***

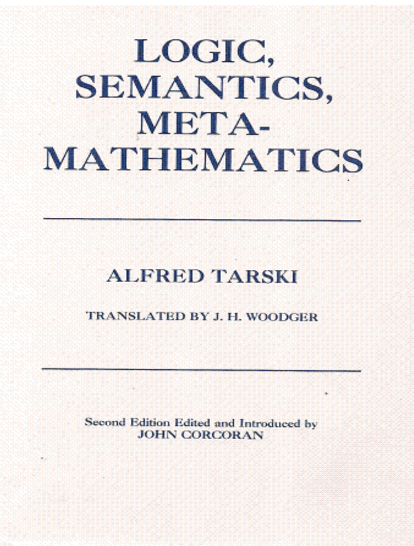
Habíamos dicho que de las dos funciones de la lógica, la función descriptiva era más básica que la función deductiva. Sobra decir que, uno trata de estudiar posibles inferencias, por referencia al apego que percibimos sobre ellas, y sistematizamos aquellas que nos parecen aceptables. El eufemismo (forma de describir algo con suavidad) actual, de apegarse a los prejuicios de la gente medianamente educada, es la “intuición”. El estudio de nuestras “intuiciones lógicas”, sin embargo pronto alcanza un punto donde necesitamos un fundamento más firme para nuestro sistema de inferencias lógicas. Las así llamadas intuiciones de la gente y aún de los lógicos filosóficos han resultado falibles. Tampoco los matemáticos han alcanzado

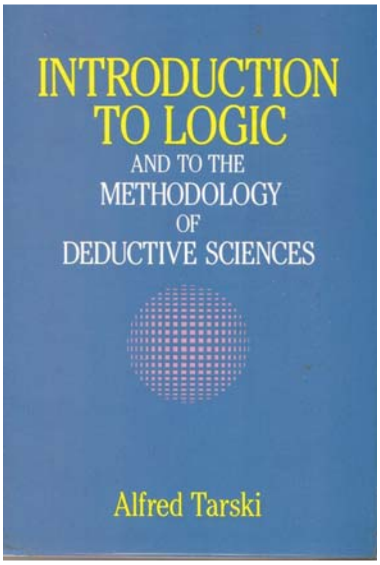
[4] Los teoremas de Gödel los estudiaremos en el capítulo V.
[5] Toda *L- teoría* consistente tiene un modelo contable (finito o enumerable).

unanimidad, sobre, cuáles principios de inferencia son confiables. Un ejemplo para mostrar es, el caso de la historia vario-pinta del *Axioma de Elección*.

La prescripción correcta, para estos males inferenciales, es prestar atención a la función descriptiva de la lógica. Esta es la que muestra, cuáles inferencias lógicas putativas (supuestas) preservan la verdad, y por qué. Verbigracia, ¿por qué, es que podemos inferir S_1 y S_2 de $(S_1 \wedge S_2)$? Porque el significado de "$\wedge$" como conectiva que combina las frases S_1 y S_2 es de tal forma que las dos tienen que ser verdaderas para que la combinación sea verdadera. Más generalmente, la base de la teoría de modelos está en la relación de la frase S al conjunto $\boldsymbol{M}(S)$ de sus modelos. Una inferencia aceptada como tal, de S_1 a S_2 es válida si y solamente si $\boldsymbol{M}(S_1) \subseteq \boldsymbol{M}(S_2)$. Las inferencias lógicas se basan en el significado de los símbolos que ellas involucran y las inferencias puramente lógicas sólo se apoyan en ellos.

Esta primera parte de nuestra aproximación a la epistemología de las matemáticas con el concurso de la obra de Hintikka nos muestra lo dificultoso que es establecer las bases de las matemáticas sobre un terreno firme. No obstante las dificultades propias del enfoque hay que reconocer que a lo largo del texto uno va encontrando el planteamiento de preguntas claves en torno a los fundamentos de la lógica y de las matemáticas. El escurridizo concepto de verdad en el sentido filosófico y particularmente en las ciencias y las matemáticas se plantea en los sistemas formales y se lleva también a la teoría de modelos buscando darle consistencia, asociándolo a la semántica, que aparece como, el telón de fondo y el sustrato fundamental, para el conocimiento.





A la izquierda la carátula del libro más referenciado de Tarski sobre lógica, semántica y metamatemáticas. Esta edición recoge los escritos pioneros en el tema que harían historia. La última edición fue trabajada por el filósofo John Corcoran con la supervisión del mismo Tarski y se terminó poco antes de su muerte en 1983. A la derecha, ***Introducción a la Lógica y a la Metodología de las Ciencias Deductivas,*** otro texto clásico, traducido a casi todos los idiomas cultos del mundo y ahora en edición económica publicado por la Editorial Dover. Un objetivo de la obra era crear un aparato conceptual que sirviera de base a la totalidad del conocimiento humano.

Siguiente Entrega: *Aritmética*