En Busca de una Nueva Concepción Filosófica para la Educación Matemática[1]

Diego Pareja Heredia. ***Universidad del Quindío***

"Algunas cosas que una vez para mi fueron reales, son ahora, aunque no equivocadas, menos reales".
Chandler Davis
"…Y similarmente, lo que hoy nos parece verdad, pudo no parecer necesariamente tan verdadero hace algunos siglos. La verdad matemática, según parece, tiene su propia historia." A. Alexander[2]

2010 Mathematics Subject Classification: 97D20

Resumen. El propósito de este artículo es mostrar al matemático de profesión y al profesor de matemáticas, cómo la educación matemática es también un tipo de matemáticas. El asociar aquí, la representación de los números naturales a polinomios de una variable, nos va a permitir el uso de una parte de la maquinaria algebraica para el estudio y justificación razonables de los algoritmos de las cuatro operaciones y además, va ayudar a una mejor comprensión de las propiedades de los números.

Palabras Clave: Educación Matemática, Lenguaje Filosófico. Lenguaje Matemático.

Abstract. The purpose of this paper is exposition, exposition intended to convince the professional mathematician and the mathematics educator that mathematics education is also mathematics. The association of number representation to one variable polynomials, let us to use a part of algebraic machinery to the study of basic algorithms related to elementary operations with numbers, and it would help us to a better comprehension of abstract number properties.

Key words and Phrases: Mathematics Education. Philosophical Language. Mathematical Language.

1. Introducción

Una de las razones que originó la aparición de la Escuela Bourbaki en los años treinta del siglo pasado fue el deseo de algunos matemáticos franceses liderados por André Weil, de llevar al aula de clase los avances de las matemáticas en los cincuenta años previos a la irrupción de la II guerra mundial[3]. Entre estos avances matemáticos mencionemos, la aparición de los espacios abstractos, la teoría de integración, el análisis matemático, el álgebra abstracta y la topología. La inclusión de estos temas en la

[1] Esta exposición aglutina porciones de otros trabajos sobre el mismo tema, en particular el artículo *Aritmética es más que simple logística*, que aparece en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info , y forma parte de las exposiciones presentadas en el posgrado de Educación de la Universidad del Quindío, en el primer semestre de 2010.
[2] Frases tomadas de la reseña hecha por A. Alexander del libro editado por Chandler Davis, et al. *The Shape of Content: Writing in Mathematics and Science.* American Mathematical Monthly. Vol. 117, No. 1. January 2010. Page 94.
[3] Weil, A. *The Apprenticeship of a Mathematician*. Birkhäuser. Boston. 1992. Pág. 100.

educación universitaria en Francia hizo que las matemáticas del currículo de secundaria también cambiara dando origen a lo que daría en llamarse Matemática Moderna, un modelo de enseñanza donde primó una metodología basada en el formalismo y el estructuralismo. Con el recurso de la teoría de conjuntos se invadió todo el espectro de la enseñanza de las matemáticas desde el pre-kínder a la universidad. Este modelo de enseñanza logró tener gran aceptación, no sólo en Francia, también en Hispano América y en Estados Unidos. El modelo fracasó y hoy, después de ensayar una especie de vuelta a lo que básicamente se enseñaba antes de la matemática moderna, se entroniza en Estados Unidos, Colombia y Portugal, hasta donde sé, un currículo fundamentado en principios y estándares[4], cuya efectividad y aceptación han sido muy cuestionadas.

En este artículo buscamos fundamentar los algoritmos de las cuatro operaciones con el recurso de los polinomios de una sola variable. No abogamos aquí por la desaparición de la aritmética de papel y lápiz como actualmente lo hace un grupo de educadores matemáticos[5]. Creo, al contrario, que debemos fortalecer la enseñanza de la aritmética de papel y lápiz con un enfoque centrado en la racionalidad de sus algoritmos, y con un estilo diferente al clásico, aquel que se basaba en la enseñanza memorística de procedimientos rutinarios, ya rebasados por las calculadoras y el computador.

Las guerra matemática que hoy se libra en el ambiente educativo de Estados Unidos en relación con el currículo para la enseñanza de las matemáticas, me recuerda la separación dada al interior de la escuela pitagórica (siglos VI a IV A. C.) entre la Aritmética y la Logística. Para empezar, la logística, era en el ambiente matemático griego, el arte práctico del cálculo numérico, mientras que la aritmética, tenida en alta estima, correspondía al estudio de los números y sus propiedades abstractas.

La logística, considerada un arte menor, comprendía la enseñanza de las reglas y procedimientos del cálculo numérico, que los miembros de la escuela ofrecían al ciudadano corriente para sus actividades comerciales o mercantiles. Los pitagóricos instruían a los comerciantes en el manejo de las tablas de sumar y multiplicar, pero su construcción era privativa de los miembros de la escuela. La elaboración de las tablas y la razón de ser de los algoritmos para realizar las operaciones presumía un conocimiento de la aritmética, que sólo se aprendía en el seno de la escuela pitagórica. Ese monopolio del conocimiento matemático por parte de los pitagóricos fue una de las características que los hicieron famosos.

Después de más de dos mil años de venir enseñando esencialmente logística en las escuelas se viene a polemizar sobre la conveniencia o no de introducir el uso de la calculadora y el computador. Visto el problema en una perspectiva histórica, estas posiciones se debaten desde la edad media cuando aparecieron los métodos algorítmicos traídos por los árabes a occidente, esta confrontación se dio entre abacistas o defensores de la permanencia del ábaco y los algoristas que promovían la enseñanza algorítmica de la aritmética en la escuela. Hoy, un bando promueve la vuelta al ábaco moderno, que correspondería al uso de la calculadora o el computador, como medios de enseñar la aritmética operativa a los niños. Lo interesante del asunto es que si se analiza las posiciones de cada uno de los frentes bélicos en la guerra matemática, uno descubre que el trasfondo del asunto reposa en la disyuntiva de si se debe o no recurrir a los

[4] National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM, Reston, Va. 2000.
[5] Ver: Ralston, A., *Let's Abolish Pencil-and-Paper Arithmetic*: http://www.doc.ic.ac.uk/~ar9/abolpub.htm

instrumentos modernos de cálculo en el salón de clase. Si se asume que las matemáticas tienen sólo un carácter utilitario, se llega a la conclusión que las dos posiciones tienen el mismo efecto: convertir al niño en un eslabón más de una cadena de ciudadanos carentes de capacidad de reflexión y de análisis en lo que a matemáticas se refiere. De tener que decidir por una de las dos opciones, creo que deberíamos optar por la primera, pues el tiempo que nos ahorra el computador o la calculadora en la práctica de las rutinas de las cuatro operaciones, lo podríamos aprovechar para enseñar a los niños la verdadera aritmética: el arte de descubrir y entender las propiedades que se ocultan en los números naturales primero, y luego hacer lo propio con las propiedades de los números reales.

Una frustración que el egresado de una licenciatura en matemáticas experimenta cuando empieza su carrera como docente, es el hecho que los conocimientos avanzados de matemáticas adquiridos en la universidad, no tienen cabida en la práctica pedagógica en escuelas o colegios. Este deslinde entre lo que se aprende y lo que se enseña tiene que terminar si queremos que, la educación no se convierta en rutina que pasa de generación en generación.

2. El lenguaje filosófico en la escuela

El lenguaje matemático es uno de los mayores avances en el progreso científico humano. Para lograrlo ha sido menester el trabajo de muchísimas generaciones de aplicados maestros de las matemáticas, desde el tiempo de Hammurabi hasta por lo menos la monumental obra de Leonhard Euler en el siglo XVIII. El lenguaje matemático como todos los lenguajes[6] tiene su vocabulario y su sintaxis; el primero incluye los símbolos y la segunda corresponde a las reglas para disponer apropiadamente de los símbolos en el contexto del discurso matemático.

El lenguaje filosófico de otra parte, viene creciendo paralelamente con la cultura humana y recorre todos los estratos del pensamiento, desde lo más elemental a lo más complejo. El discurso filosófico, a diferencia del matemático, generalmente es asequible a todos los seres humanos incluyendo los niños. Para llegar al lenguaje matemático en la infancia, lo más apropiado es usar la vía del lenguaje filosófico, al cual los niños son proclives desde la más tierna edad. Este lenguaje se origina en la curiosidad natural por conocer el mundo que les rodea y por el deseo de descubrir las razones que están detrás de los hechos que ante ellos aparecen. Todos estamos familiarizados con la continua pregunta ¿por qué?, la misma que el niño nos formula a cada paso. Esas preguntas y sus respuestas son las que, de un lado, van a enriquecer la capacidad para explicarse racionalmente los fenómenos a su alrededor y de otro lado van a afianzar su capacidad de análisis en relación con los problemas que enfrenta a medida que crece física y mentalmente.

A lo largo de este trabajo esperamos mostrar cómo se puede llegar a la aritmética y así al lenguaje matemático a través del recurso del lenguaje filosófico que se desarrolla en

[6] Ver mis notas de Epistemología de las Matemáticas, especialmente *David Hilbert y el Formalismo*, en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info.

los primeros años de la infancia. Para empezar aceptemos,[7] que el niño viene con una predisposición a reconocer y a abstraer el concepto de número, en particular a reconocer el sentido de la pregunta ¿cuantos?, y su consecuente respuesta. Antes de los dos años, el niño discrimina ya, una gran variedad de objetos y reconoce cosas, con iguales o similares características. El distinguir el objeto de su preferencia entre muchos, muestra que el niño ya captura la noción de unidad, de una parte y la noción de diversidad de otra. En estas amplias categorías de unidad y diversidad (las partes versus el todo) es donde se empieza a discernir la existencia del concepto abstracto de número, quizá (aunque discutible) primero, el concepto de número natural y luego el concepto de número real.

Dije que la prioridad en la aparición de los conceptos de número natural y de número real en el niño es discutible, por cuanto que, la noción de número puede también relacionarse con las ideas de orden, de longitud, de tamaño, de tiempo, etc., pues preguntas como: ¿Quién está adelante?, ¿Cuál es más largo?, ¿Qué es más grande?, ¿Qué hora es?, ¿Qué tarda más?, etc., tienen respuesta en los números reales y no necesariamente en los números naturales. La posibilidad de considerar a los números reales como una noción recibida, digamos genéticamente, puede permitir introducir un currículo diferente al tradicional que empieza con el número natural. Este es el caso del modelo de Davidov, discutido en otros artículos[8], que empieza con los números reales para seguir luego con los números naturales.

El mecanismo de aprendizaje involucrado en el proceso pregunta-respuesta, típico en el período de la infancia, conlleva un lenguaje aprendido en las primeras etapas de desarrollo mental entre cero y dos años. Es al lenguaje involucrado en este proceso al que me referiré aquí como lenguaje filosófico. Veremos cómo este lenguaje coadyuva a fijar el concepto de número en términos de un lenguaje nuevo para el niño, al que me referiré en adelante como lenguaje matemático.

Empecemos por afirmar que, el lenguaje coloquial de las palabras, a través de las cuales nos comunicamos con el niño tiene un significado, y la semántica que él origina no es de ninguna manera uniforme en el niño y en el adulto. Para un infante la palabra "dos", no es más que un golpe de voz que el distingue de "tres" por su sonoridad distinta y no propiamente porque las palabras correspondan a números distintos. El lenguaje escrito va a acercarlo un poco más a establecer la diferencia conceptual entre 2 y 3, por ejemplo, aunque aun no podamos afirmar que él distinga estos dos símbolos como representación de dos entes abstractos: los números dos y tres.

Las matemáticas, y en particular la aritmética; aquí entendida en su sentido amplio de las operaciones, las aplicaciones y las propiedades abstractas de los números, estudiadas en lo que se conoce como teoría de números, usa un lenguaje escrito muy peculiar: una combinación de lenguaje filosófico y lenguaje simbólico característico, que en general no es asequible al común de la gente. Este lenguaje matemático escrito hay que enseñarlo al niño desde los primeros años. Desde la Edad Media y en gran medida por

---

[7] Ver: Devlin, K. *The Math Gene. How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers are like Gossip.* Basic Books. Great Britain. 2000

[8] En "Devlin´s Angle", la columna de Keith Devlin en la Página Web de la MAA hay algunos artículos que tocan este tema. En la sección "Filosofía" de mi página Web: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info vengo traduciendo la columna de Devlin con el nombre "En el Ángulo de Devlin"

la penetración de la cultura árabe en Europa, se hizo popular el **sistema decimal posicional**. Por su equilibrado balance entre el número de sus símbolos y sus reglas de posición y orden, adquirió una universalidad rayana en la exclusión de otras posibilidades. Lo más valioso en el sistema, no es ni su simbología, ni aun el número de elementos básicos para la escritura de los números, sino el orden que está implícito en la escritura de los símbolos. Usted podría decir que ocurre lo mismo en las palabras escritas: si cambia el orden a las letras de una palabra, ésta puede significar otra cosa o no significar nada, pero no es así en los números, el orden en que están dispuestos los símbolos en la representación de un número es precisamente lo que identifica la representación de un número; si el orden cambia encontramos otro número. Haremos clara esta idea en la siguiente sección.

3. El Orden de las Partes con relación al Todo

El lenguaje matemático empieza con un corto alfabeto básico. Ese alfabeto está constituido por elementos simples que llamaremos cifras[9]; para el caso universalmente aceptado como sistema decimal, éste contiene los símbolos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y, 0. Estos símbolos se disponen, en la escritura occidental de izquierda a derecha para configurar lo que en tiempos pasados se decía un *guarismo*[10] o como decimos hoy un numeral. El numeral es una entidad que representa un número a través del lenguaje escogido de los símbolos escritos y del orden que este mismo lenguaje asigna a las partes con respecto al todo.

El orden (el que permanece inalterable) da un valor relativo a las cifras según la posición que ocupen en el numeral. Por ejemplo, en el numeral 7342, correspondiente al número siete mil trescientos cuarenta y dos, el orden asigna a 7, al encabezar la escritura del numeral de izquierda a derecha, el valor relativo de siete mil,. Análogamente 3 representa en este numeral trescientos, como 4 representa cuarenta; mientras que 2 representa las unidades simples es decir al número dos. Ese orden en que escribimos de izquierda a derecha va en contravía con respecto al valor relativo de las cifras. Es decir, el valor de las cifras disminuye cuando vamos de izquierda a derecha y aumenta en sentido contrario. Sería más fácil (al menos para la mente del niño) leer el número anterior como 2 unidades, 4 decenas, 3 centenas y 7 millares, en el caso que estuviera escrito como 2437. Probablemente esta forma de escribir los números la hayamos heredado de la escritura árabe que se hace de derecha a izquierda.

Pero bien. Ya tenemos claro que las cifras toman su valor según el orden que ocupan en el numeral. Ese sentido de orden es fundamental en los sistemas numéricos posicionales. Uno de estos sistemas, como dijimos, es el decimal, heredado de la cultura hindú-arábiga que llegó a Europa entre los siglos VIII y IX y se ha mantenido desde entonces como el único sistema numérico de uso universal. Cabe preguntarse el motivo o el porqué de la escogencia de diez y no de otro número como base para un sistema

---

[9] La palabra cifra se origina en el término árabe *sifr*, traducido del hindú *sunya* que significaba "*desocupado o vacío*". De allí también se deriva la palabra cero.

[10] El término se origina en las traducciones al latín de las obras de Al-Kuarizmi durante la edad media, donde aparecía reiterativamente la frase: *Algoritmi dixit* (Al-Kuarizmi dijo). De allí también viene la palabra *algoritmo*, que significa en matemáticas un proceso de un número finito de pasos que conduce a un resultado.

numérico universal. No conocemos respuesta que satisfaga en absoluto la inquietud del matemático. Posiblemente el número diez se escogió porque nuestras manos tienen diez dedos o porque las cifras no son demasiadas, ni difíciles de escribir o porque con esas cifras se escriben números muy grandes o muy pequeños o en fin por otras consideraciones menores de estética o comodidad. Sin embargo por razones de comodidad y de economía de pensamiento habría sido más apropiado escoger al número dos como base de un sistema numérico universal.

Al escribir un numeral en una sucesión de espacios desocupados: "□□...□", cabe preguntarse dos cosas. Primero, ¿Cuántos espacios desocupados aparecen? Y segundo con que llenar esos espacios desocupados. La respuesta a la primera pregunta nos dirá la magnitud del número representado por ese numeral. La respuesta a la segunda, nos da información sobre la base del sistema que vamos a emplear. A las preguntas anteriores hay que agregar otra relacionada con un símbolo que nos informe, cuando sea el caso, si en el numeral hay, uno o varios lugares desocupados, es decir, algo que indique la ausencia de cifras significativas de determinado orden en esos lugares. Ese papel de señalador o indicador de espacios desocupados lo desempeña el numeral que simbolizamos por 0. Así por ejemplo, cuando escribo en sistema decimal el número 100 estoy diciendo que en el lugar, de las decenas y de las unidades no hay cifras significativas distintas de cero. El símbolo **0** juega entonces dos roles: el mencionado de representar lugares desocupados y el de ser el símbolo para el cardinal o número de elementos del conjunto vacío.

4. Lo que existe detrás de la Representación Numérica

Cuando uno ve la inocente figura de un número representado en un lenguaje numérico dado, no alcanza a imaginar el acervo informativo que subyace detrás de esa sucesión de cifras. Los párrafos anteriores describen en lenguaje filosófico parte de la riqueza que esa representación encierra, como es el orden, las cifras y el papel del cero. Sin embargo hay mucho más que va a lindar con partes avanzadas de las matemáticas y con el lenguaje matemático que normalmente se mantiene oculto al estudiante de las matemáticas elementales de K-8. [11] En otros artículos he puesto de presente explícitamente estas conexiones[12]. Aquí voy tocar el tema de los polinomios y su introducción en los primeros grados de la enseñanza de las matemáticas en la escuela elemental a través de lenguaje filosófico, inmerso, desde luego, en el espíritu central de este artículo.

Está en la práctica humana del contar, ya por razones nemotécnicas, ya por conveniencia para recontar y rectificar, el hacer paquetes con unidades simples. Así por ejemplo, contamos las cosas en pares, en cuartetos, en sextetos, en decenas, docenas, etc. Esa forma casi innata de facilitar el conteo está detrás de la representación de los

[11] Acrónimo para denotar el currículo desde pre-Kinder al grado 8 de la formación básica en Estados Unidos y Gran Bretaña.
[12] Este tema fue tratado en: ***Del Bit a las Wavelets. Hacia un Radical Cambio en la Enseñanza de las Matemáticas,*** que puede leerse en: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/Del%20Bit%20a%20las%20Wavelets%20XVII%20CNM%20-%20CALI.pdf

números con numerales expresados en bases numéricas posicionales. Cuando estamos contando en base diez, por ejemplo, empezamos por unidades simples como, uno, dos, y seguimos hasta nueve. Al llegar a diez lo que realmente hacemos es acopiar un paquete o porción de diez unidades. Esa porción nos servirá de medida. Para denotarla recurrimos por primera vez a una combinación de dos cifras, la primera que demarca la porción, en este caso 1 y en segundo lugar cero para denotar la no aparición de unidades simples. Así, diez aparece representado por el numeral 10: un paquete (de diez) y cero unidades simples. De allí en adelante seguimos contando por paquetes y unidades simples. Decimos, por ejemplo, tres paquetes y tres unidades y lo representamos por 33; ocho paquetes y nueve unidades y lo representamos como 89.

Esto de contar por unidades primero y luego por paquetes, tiene una larga historia. Entre los archivos escritos más antiguos en esta materia, figura la notación jeroglífica egipcia y la escritura cuneiforme babilonia de hace más de tres milenios. Mientras los egipcios agrupaban en paquetes de diez, los babilonios lo hacían en paquetes de diez y sesenta. Los astrónomos babilonios dividieron la hora en sesenta minutos y el minuto en sesenta segundos, también la medida angular siguió ese mismo patrón donde el grado se segmenta en sesenta minutos y el minuto en sesenta segundos. Aun hoy es común ver en el comercio, agrupar en paquetes de docena y luego en paquetes de una gruesa, es decir, de doce docenas.

La cultura más antigua y vigente aun, es la cultura china. En esa cultura la forma vertical de escribir los números siguió un patrón decimal, en el sentido de contar por paquetes de diez primero, luego por paquetes de cien y así sucesivamente[13]. También las matemáticas hindúes tomaron a diez como patrón de medida para los paquetes. Históricamente nuestro sistema decimal tiene sus orígenes en esas antiguas culturas. Agreguemos que la cultura china además del sistema decimal, nos muestra lo que podríamos llamar los precursores del sistema binario; primero, a través de la filosofía taoísta del *yin* y del *yang*, donde los opuestos juegan un rol importante en la interpretación del mundo, y segundo, en los hexagramas que aparecen en el *I Ching*[14], cuyo número depende de las permutaciones resultantes de dos opciones (*yin* o *yang*) en seis posiciones diferentes.

Los números son entidades abstractas que no podemos ni ver ni palpar, son producto de la abstracción de nuestro intelecto, que permiten, sin embargo, ser representadas por símbolos. Esa representación a través de numerales o figuras escritas no es única y por lo tanto va a depender de una convención cultural, como ocurre con la notación decimal que hoy usamos. Podríamos representar los números en otras formas, como es el caso de la notación romana que aun se usa ocasionalmente, pero que carece de las ventajas de los sistemas posicionales, en los que, la representación de un número es realmente única.

---

[13] Ver: Eves, H. *An introduction to the History of Mathematics*. 4th Edition. Holt, Reinhart and Winston. New York. 1976. Pág. 14.

[14] Para una buena traducción de este clásico de la filosofía china ver: Wilhelm, R. *I Ching. El Libro de las Mutaciones*. EDHASA. Barcelona. 1979. En la página 398 aparece la representación del *Lo Shu*, un cuadrado mágico de orden tres en el que se combinan los trigramas y los primeros números pares e impares asociados a categorías filosóficas como: los puntos cardinales, los colores, las cuatro estaciones, etc. Leibniz hizo un estudio detallado de los hexagramas que lo condujo a introducir el sistema binario. Más detalles de los trabajos de Leibniz en este sentido se encuentran en mi artículo: *El Poder del Dos* que aparece en:
http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/conferencias/El%20poder%20del%20Dos2.pdf

Volvamos a la representación de un número en forma de suma de paquetes de distinto tamaño o dimensión, por ejemplo, usando paquetes de diez, de cien, de mil unidades, etc. Estos paquetes en un sistema numérico posicional no son arbitrarios, por el contrario llevan un orden de menor a mayor donde el paquete siguiente a uno dado siempre es un múltiplo del anterior. En el sistema decimal la centena es diez veces la decena, el millar diez veces la centena y así sucesivamente. Estos paquetes empiezan en las unidades simples que llamaremos aquí de dimensión cero. En el sistema decimal estos paquetes de dimensión cero los denotamos por 10^0, los paquetes de dimensión uno, como 10^1 y así progresando los exponentes de uno en uno. Esta notación que en el lenguaje matemático se llama notación exponencial tiene sus ventajas por cuanto simplifica la escritura de la iteración de las multiplicaciones sucesivas y porque las propiedades de la potenciación facilita ciertas operaciones. Entendamos por ahora que si nos referimos a potencias de un número *x*, nos estamos refiriendo a expresiones del tipo x^j, donde tanto *x* como *j* son enteros positivos y *j* puede ser cero para el paquete de dimensión cero mencionado antes. Entonces cuando se escoge un *x*, los paquetes en los sistemas numéricos posicionales vendrán sucesivamente en tamaños x^0, $x^1, \ldots,$ x^n, donde *n* indica el mayor exponente o la mayor de las dimensiones de los paquetes.

5. La forma estándar de ver los números

Cuando sumamos diversas cantidades de paquetes de distinta dimensión uno puede hacerlo simbólicamente del mismo modo que lo hacemos en álgebra, a través de polinomios. Los polinomios como los vamos a entender aquí son expresiones algebraicas formadas por sumas y productos. Lo que buscamos aquí es, asociar la representación de un número a cierto tipo de polinomios; exactamente a los compuestos por sumas de paquetes de distinta dimensión o tamaño. Formalmente estos polinomios de una variable *x* a los que nos referimos, son expresiones que simbólicamente se representan así:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0 = \sum_{j=0}^{j=n} a_{n-j}x^{n-j}. \qquad (*)$$

Un polinomio es entonces un agregado de (*n* + 1) términos de (*n* + 1) tamaños; específicamente: a_n paquetes de tamaño x^n más a_{n-1} paquetes de tamaño x^{n-1} y así sumando paquetes cada vez de menor tamaño hasta llegar a a_0 paquetes de tamaño x^0, que hemos dicho son las unidades simples. La expresión (*) según las condiciones que hemos impuesto vale para valores enteros positivos *x*, distintos de uno y para enteros no negativos en el caso de los a_j. Sin embargo para nuestros objetivos tenemos que restringirnos al caso donde $0 \leq a_j < x$. Este número *x* se llama la base del sistema numérico. Los polinomios que estudiamos en el álgebra elemental pueden desde luego, tomar valores arbitrarios en los números reales, tanto en los coeficientes como en la variable *x*.

La forma de escribir un polinomio como aparece a la derecha de (*) evita los puntos suspensivos y facilita en ciertos casos el manejo de operaciones con polinomios como se verá más adelante. Lo que venimos llamando paquete de dimensión *j*, esto es, x^j, corresponde exactamente a la potencia *j*-ésima de *x*, es decir, a *x* tomado *j* veces como factor. Al interpretar el número 25847 como dos paquetes de diez mil unidades más cinco paquetes de mil unidades, más ocho paquetes de cien unidades, más cuatro paquetes de diez unidades más siete unidades simples o de tamaño x^0, estamos simbólicamente refiriéndonos al polinomio

$P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x^1 + 7x^0 = \sum_{j=0}^{j=4} a_{4-j}x^{4-j}$, donde, para nuestro caso, *x* vale 10 y los coeficientes a_{n-j} toman sucesivamente los valores 2, 5, 8, 4 y 7.

Las consideraciones anteriores nos permiten afirmar que con cada número está asociado un polinomio y esta asociación es única en el sentido de que las cifras del número unívocamente determinan el polinomio asociado a él. De otro lado los polinomios hasta aquí vistos se caracterizan por tener sus exponentes ordenados de mayor a menor hasta llegar a cero. En general dos polinomios de igual grado son iguales siempre que los coeficientes en su orden sean iguales. Simbólicamente,

$P(x) = \sum_{j=0}^{j=n} a_{n-j}x^{n-j} = Q(x) = \sum_{j=0}^{j=n} b_{n-j}x^{n-j}$, siempre que, $a_{n-j} = b_{n-j}$, para cada $j = 0,1,\ldots,n$.

Diremos entonces que dos polinomios de una variable *x* son iguales si y solamente si, sus coeficientes en su orden son iguales. Esta caracterización de los polinomios de una variable es muy útil en gran variedad de aplicaciones.

6. Polinomios y operaciones definidas en ellos

Los polinomios de grado *n*, aquí descritos, pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse usando reglas más sencillas que las análogas para los números. Por ejemplo la suma y la resta de dos polinomios es el polinomio formado por la suma o la resta de los respectivos coeficientes en su orden de grado. Sin embargo cuando los asociamos a la representación numérica se debe tener en cuenta que las operaciones se hacen en la base en que los coeficientes están representados. Es decir, si la representación es decimal la suma está definida de acuerdo a las tablas de sumar y multiplicar decimales y se debe ajustar el polinomio final a la forma estándar; los a_i son dígitos del sistema y el polinomio resultante puede cambiar de grado. Tomemos el siguiente ejemplo para números representados en base decimal. En este caso, $x = 10$. Si $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x^1 + 7x^0$, y, $Q(x) = 9x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 7x^1 + 7x^0$, la suma será:

$P(x) + Q(x) = (2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x^1 + 7x^0) + (9x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 7x^1 + 7x^0) = 11x^4 + 11x^3 + 16x^2 + 11x^1 + 14x^0 = (10+1)x^4 + (10+1)x^3 + (10+6)x^2 + (10+1)x^1 + (10+4)x^0 = (x+1)x^4 + (x+1)x^3 + (x+6)x^2 + (x+1)x^1 + (x+4)x^0 = 1x^5 + 1x^4 + 1x^4 + 1x^3 + 1x^3 + 6x^2 + 1x^2 + 1x^1 + 1x^1 + 4x^0 = 1x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x^1 + 4x^0$.

Todas las transformaciones y reducciones hechas en los renglones que anteceden son la justificación para lo que, en los algoritmos llamamos el proceso de llevar unidades de un orden, al orden siguiente. Realmente lo que hacemos es sumar módulo 10, dejando el resto en ese nivel y la unidad sobrante la adicionamos a las unidades del orden inmediatamente superior.[15]

Si damos a las *x*`s por sobreentendidas, y omitimos lo signos + dentro de los paréntesis, el proceso se reduce a dos líneas:

$P(x) + Q(x)$ →= (2, 5, 8, 4, 7) + (9, 6, 8, 7, 7)) →= (11, 11, 16, 11, 14)) →= (10+1, 10+1, 10+6, 10+1, 10+4)) →= (1, 2, 2, 7, 2, 4). Donde el símbolo "→=" está para significar el cambio de representación

Lo anterior es el transvase del lenguaje filosófico de la adición de paquetes ordenados al lenguaje matemático de los polinomios y de éste, al proceso simplificado en el algoritmo:

$$\begin{array}{r} 25847 \\ \underline{+96877} \\ 122724 \end{array}$$

Con el uso de los polinomios podemos justificar y explicitar las razones en las que se fundamentan los algoritmos de la suma y las demás operaciones elementales de las matemáticas.

Al comienzo sosteníamos que la escogencia del número diez como base para representar los números es completamente arbitraria y que la base más simple y fácil de aprender es la base binaria en la que dos elementos son suficientes para representar todos los números. Y no sólo los números naturales, también la totalidad de números reales, incluyendo los irracionales, supuesto que podemos prolongar las expansiones de dígitos al infinito.

7. Dos es suficiente

En *El Poder del Dos* y *Del Bit a las Wavelets*[16] se muestra cómo, con los dígitos 0 y 1, es posible desarrollar toda la aritmética de las cuatro operaciones y mucho más. Por ejemplo, hacer teoría de números, acceder a la teoría de probabilidades y hasta introducir las Wavelets. Aquí estudiamos la representación de los números en forma polinómica, las cuatro operaciones elementales asociadas a las correspondientes operaciones en polinomios y de paso justificamos los algoritmos de la aritmética elemental en forma razonada.

---

[15] Este proceso de "llevar" unidades de un orden al siguiente por elemental que parezca tiene una gran significancia en matemáticas avanzadas y específicamente en teoría de probabilidades. El comportamiento de este proceso puede verse como una cadena de Markov, con espacio de transición en {0, 1,…, 9}. Un artículo reciente (Noviembre de 2009) muestra esta conexión. Ver: Diaconis, P., et al. *Carries, Shuffling, and An Amazing Matrix*. The American Mathematical Monthly. Vol. 116. No. 9.

[16] Ver estos artículos en mi página Web: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info

Cuando nos referíamos a la representación de un número como un agregado de paquetes de diferente tamaño, significábamos que un número natural corresponde a una asociación con el conteo 0, 1, 2, 3, etc., y ese conteo desde la Edad Media lo venimos haciendo en base decimal, es decir, usando la metáfora de los paquetes en base decimal. Sin embargo es mucho más fácil hacerlo usando base binaria, donde el conteo sigue el mismo patrón del reciclaje de las cifras **0** y **1**, en el siguiente orden:

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, etc.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, etc.

Mientras en la segunda fila usamos paquetes decimales, en la primera fila usamos paquetes binarios. Por ejemplo, en sistema binario el numeral 1111 corresponde de derecha a izquierda, a una unidad simple más un par, más una cuádrupla, más una óctupla, lo que representa: $1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 1 \times 2^0 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$. El proceso de interpretar el numeral en términos de las potencias de base dos, da un método para convertir numerales binarios a numerales de base diez. En general, si tenemos un número b en base binaria, su equivalente en base decimal se encuentra según la fórmula:

$$b = \sum_{j=0}^{j=n} b_{n-j} 2^{n-j} = b_n \times 2^n + \dots + b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0.$$

Donde los b_j son dígitos 0 ó 1 y la suma de la derecha se hace en base diez.

Usando como base al número dos vamos a lograr reglas muy simples para calcular la suma iterada de potencias de dos. Por ejemplo:

$1 \times 2^0 + 1\times 2^1 + 1\times 2^2 + 1\times 2^3 + \dots + 1\times 2^{n-1} = 2^n - 1$, donde $n = 1, 2, \dots$

Esta fórmula se puede verificar[17] en el caso en que $n = 4$, vista arriba y cuyo valor es 15.

Llevar un numeral de base diez a base binaria es también simple. El proceso consiste en dividir el número sucesivamente por dos dejando los residuos de derecha a izquierda hasta obtener un cociente de **1**. Este último cociente será la primera cifra significativa del numeral binario correspondiente al numeral decimal dado inicialmente. El proceso se sustenta en el hecho de que buscamos reducir el número a suma de paquetes de tamaño cero, tamaño uno, tamaño dos, tamaño tres, etc.

Veamos, por ejemplo, como llevar el numeral decimal **234** a numeral binario. La primera división por dos deja cociente 117 y residuo **0**, aquí aparece el paquete de tamaño cero**;** la segunda división da cociente 58 y da un residuo de **1**, aquí aparece el paquete de tamaño 1; la tercera división da un cociente de 29 y un residuo de **0**, con cero paquetes de tamaño 2; la cuarta división da un cociente de 14 y residuo **1**, para un paquete de tamaño 4; y así sucesivamente, la siguiente división produce un cociente de 7 y residuo **0**; la siguiente da por cociente 3 y residuo **1**; luego encontramos cociente **1** y

[17] Una aplicación de esta fórmula a una antigua leyenda referida al ajedrez se encuentra en mi artículo *El Poder del Dos* y en *Las matemáticas detrás de las Pirámides* que pueden leerse en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info.

residuo **1**. Aquí termina el proceso, dando la secuencia de los dígitos del numeral en base dos: **11101010**. En la representación del numeral, las cifras no nulas indican las potencias de dos que intervienen en la suma cuando se trata de hallar el valor numérico del numeral. En este ejemplo el número uno aparece en las potencias uno, tres, cinco, seis y siete. El valor numérico del numeral llevado a base decimal es: $1\times 2^1 + 1\times 2^3 + 1\times 2^5 + 1\times 2^6 + 1\times 2^7 = 2 + 8 + 32 + 64 + 128 = 234$. Todo el proceso se puede esquematizar como:

$$\begin{array}{r|l} 234 & 0 \\ 117 & 1 \\ 58 & 0 \\ 29 & 1 \\ 14 & 0 \\ 7 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

$$\mathbf{234} = 1\times 2^1 + 1\times 2^3 + 1\times 2^5 + 1\times 2^6 + 1\times 2^7 = \text{binario } 11101010$$

Los números a la derecha de la vertical y el último dígito de la izquierda corresponden a los dígitos binarios del número representado decimalmente como **234**.

Los números expresados en sistema binario permiten hacer aritmética en forma fácil y sin esfuerzo por cuanto que las tablas de sumar y multiplicar en el sistema binario son en extremo simples. Las dos tablas se pueden reducir al siguiente esquema:

+	**Cero**	**Uno**	×	**Cero**	**Uno**
Cero	**0**	**1**	**Cero**	**0**	**0**
Uno	1	10	Uno	0	1

Tablas para la suma y la multiplicación en el sistema binario.

Los mismos algoritmos del sistema decimal aplican al sistema binario pero con la ventaja de que la parte de memorización es más simple. Veamos un ejemplo con su equivalente decimal

$$\begin{array}{r} 11101010 \\ \times \underline{\quad\quad 111} \\ 11101010 \\ 11101010 \\ \underline{11101010} \\ 11001100110 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 234 \\ \underline{\times 7} \\ 1638 \end{array}$$

$11001100110 = 0\times 2^0 + 1\times 2^1 + 1\times 2^2 + 0\times 2^3 + 0\times 2^4 + 1\times 2^5 + 1\times 2^6 + 0\times 2^7 + 0\times 2^8 + 1\times 2^9 + 1\times 2^{10} = 2 + 4 + 32 + 64 + 512 + 1024 = 1638.$

Al comparar los dos procedimientos se nota que en el sistema binario se emplea muchos más pasos que en el sistema decimal, eso en parte hace que el sistema decimal sea más ventajoso cuando se trata de aritmética de papel y lápiz. Sin embargo en materia de memorización de los elementos básicos necesarios para multiplicar (tablas de la suma, la multiplicación y aprendizaje de reglas básicas) es más fácil hacerlo en el sistema binario que en cualquier otro sistema. Es usando el sistema binario que el computador realiza las operaciones y para él, el número de pasos no tiene importancia mayor, ya que, realiza millones de operaciones en una fracción de segundo. Lo que si queremos poner de presente es que usamos el sistema binario aquí para justificar los algoritmos de las operaciones básicas y no para sustituir los métodos tradicionales. Las operaciones y los cálculos aritméticos se los dejaremos a las calculadoras y al computador.

En el sistema decimal para multiplicar por 10 solamente se agrega un cero al otro factor y se tiene el producto. En el sistema binario se sigue la misma regla agregando tantos ceros como tenga la potencia de dos por la que se quiere multiplicar. Entre 1 y 99 para el sistema decimal sólo está el 10 con esta propiedad. En sistema binario, en cambio, aparece 10, 100, 1000, 10000, 100000 y 1000000, correspondientes a los valores decimales de 2, 4, 8, 16, 32 y 64. Hay otras reglas sencillas para simplificar la multiplicación. Por ejemplo si se quiere multiplicar un número por un factor compuesto solamente por 1´s, como 11, 111, 1111, etc., se agrega al otro factor tantos ceros y uno más, como unos haya, y al resultado se resta el factor inicial. Por ejemplo en la multiplicación de arriba, 11101010 × 111 = 11101010×(1000 - 1) = 11101010000 – 11101010 = 11001100110.

8. Suma y Resta en Polinomios

Los polinomios que estudiamos aquí son los descritos en la sección **5**. Vimos arriba la forma de sumar polinomios, aquí analizaremos la sustracción de los mismos. Restar es el proceso inverso a sumar. El algoritmo para la resta o sustracción se sustenta, al igual que para la suma, en la misma operación en polinomios. Supongamos para ilustrar que, en base dos queremos restar ***n*** =10010, de, ***m*** = 110010. Usando representación polinómica con $x = 2$, la sustracción la podemos expresar como:

$P(x)$ **-** $Q(x) = \mathbf{(}1\times x^5 + 1\times x^4 + 0\times x^3 + 0\times x^2 + 1\times x^1 + 0\times x^0\mathbf{)} - \mathbf{(}1\times x^4 + 0\times x^3 + 0\times x^2 + 1\times x^1 + 0\times x^0\mathbf{)} = 1\times x^5 + \mathbf{(}1\times x^4 - 1\times x^4\mathbf{)} + \mathbf{(}0\times x^3 - 0\times x^3\mathbf{)} + \mathbf{(}0\times x^2 - 0\times x^2\mathbf{)} + \mathbf{(}1\times x^1 - 1\times x^1\mathbf{)} + \mathbf{(}0\times x^0 - 0\times x^0\mathbf{)} = 1\times x^5 + 0\times x^4 + 0\times x^3 + 0\times x^2\ 0\times x^2 + 0\times x^1 + 0\times x^0 = 100000$.

La aparición del numeral 10000 al final de la expresión anterior corresponde al valor numérico en base dos del polinomio diferencia y está asociado al número decimal 32 = 2^5**.** En los polinomios a los que nos referimos, los ceros indican las potencias de dos ausentes en la representación numérica. Aquí la única cifra significativa aparece en el lugar de las unidades de orden cinco, todas las demás son cero. La sustracción en este caso se realiza en base dos, recordando, por ejemplo que en base 2, 10 – 1 = 1 y que en general aplica la regla de transferencia de unidades de mayor orden al orden siguiente.

La verificación de la resta se realiza por medio de la suma. Por ejemplo, 1000 – 11 = 101, significa que 1000 = 101 + 11. En efecto 101 + 11 = $(1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0\mathbf{)} + (1\times 2^1 + 1\times 2^0) = 1000$. Puesto que aquí la aritmética es binaria, 1 + 1 = 10, lo que indica que anotamos 0 y llevamos una unidad al siguiente nivel para obtener nuevamente 10, anotando 0 y llevando otra unidad al siguiente nivel, que da de nuevo 10 y así el resultado es 1000.

En la sustracción, el paso crucial ocurre cuando se sustrae de a_j, b_j sabiendo que $b_j > a_j$. Este paso de llevar unidades negativas al nivel precedente es siempre para un niño un verdadero misterio. Desde esa temprana edad empieza la fobia a las matemáticas por cuanto que en los primeros años, la mente del niño se forma piramidalmente buscando soporte para las cosas que el va acumulando en los estratos superiores de su pequeño intelecto. Al no entender la razón de estos pasos aparentemente obvios para los maestros, el niño siente y se queda con el peso de la frustración, y de su incapacidad mental para entender el intríngulis de la sustracción.

Lo que buscamos con la metodología de aproximación a los números a través de los polinomios, es convertir las operaciones elementales en procesos razonados y entendibles, y que satisfagan la curiosidad innata del niño y del adolescente que busca soporte lógico a todas sus acciones. El introducir el sistema binario en estas notas no tiene el propósito de sustituir al sistema decimal, hoy convertido en sistema numérico universal, sino más bien, mostrar que el decimal es uno de tantos sistemas de representar los números y que en el sistema binario es más fácil explicar las operaciones de la aritmética que en el sistema decimal. Es por su simplicidad que este sistema ha sido implementado en los computadores y en la tecnología actual de los celulares, iPods, etc.

Cuando sustraemos 1 de 1000 en sistema decimal, la mente nos dice inmediatamente que es 999. Pero si lo queremos hacer a través del algoritmo que aprendemos en la escuela, tenemos que "pedirle prestado" al último cero, 1 para formar 10. Pero, ¿cómo es que el cero presta uno, si el cero no contiene al uno? Y aquí viene la debacle del maestro que no puede, con el recurso de lo que ha enseñado, darle una explicación al niño. Conociendo que los números se pueden expresar como polinomios, las razones que justifican el "pedir prestado" aparecen naturalmente sin necesidad de hacer malabares argumentativos. 1000 se puede expresar como polinomio así: $P(x) = 1x^3 + 0x^2 + 0x^1 + 0x^0$, con $x = 10$. Pero $1x^3 = x \times x^2 = 10 \times x^2 = 9 \times x^2 + 1 \times x^2 = 9 \times x^2 + 10 \times x = 9 \times x^2 + 9 \times x + x = 9 \times x^2 + 9 \times x^1 + 10 \times x^0$. En esta última expresión, al cambiar a x por 10 obtenemos 1000. Escrito de este modo ya no es problema restar 1 de $P(x)$.

En efecto, $1000 – 1 = 9 \times x^2 + 9 \times x^1 + 10 \times x^0 - 1 = 9 \times x^2 + 9 \times x^1 + 10 \times x^0 - 1 \times x^0 = 9 \times x^2 + 9 \times x^1 + 9 \times x^0 = 999$.

En los primeros pasos en el párrafo de arriba, lo que hicimos fue lograr una representación del número que permitiera la sustracción natural de cifras menores de cifras mayores sin ninguna dificultad. Tomemos en seguida un ejemplo en sistema binario, donde restaremos 11 de 100. Puesto que las cifras del minuendo son en general, menores que las del sustraendo, daremos inicialmente una representación de 100, que permita la sustracción en forma fácil. Recordando que para el sistema binario x es 2, la representación polinómica de los números en cuestión es:

$100 = 1 \times x^2 + 0 \times x^1 + 0 \times x^0 = x \times x^1 + 0 \times x^1 + 0 \times x^0 = 2 \times x^1 + 0 \times x^1 + 0 \times x^0 = (1+1) \times x^1 + 0 \times x^1 + 0 \times x^0 = 1 \times x^1 + 1 \times x^1 + 0 \times x^0 = 1 \times x^1 + 10 \times x^0$.

$11 = 1 \times x^1 + 1 \times x^0$.

Con esta representación se hace sencilla la sustracción.

$100 - 11 = (1\times x^1 + 10\times x^0) - (1\times x^1 + 1\times x^0) = (1\times x^1 - 1\times x^1) + 10\times x^0 - 1\times x^0 = 1$.

En el proceso anterior hemos manejado lenguaje algebraico convencional que no ofrece dificultad en la medida en que enseñemos las reglas de sintaxis que este lenguaje exige. Tras de todos estos procesos subyace un principio básico: la homogeneidad de los sumandos. Con esta homogeneidad el niño se familiariza desde sus primeros años al agregar normalmente cosas del mismo tipo para formar paquetes, que a su vez se agregan para formar nuevos paquetes de mayor dimensión. El lenguaje de los polinomios es lo suficientemente flexible como para cambiar, un polinomio por otro sin que sus valores se alteren, cosa que no podríamos hacer en la representación numérica, donde una cifra no puede tomar el mismo valor x que sustenta la base numérica.

9. Multiplicación de polinomios

La multiplicación de números es en verdad en extremo difícil, y la razón de esa dificultad radica en lo complejo que resulta multiplicar polinomios. En esencia, el producto de polinomios resulta de multiplicar cada sumando del primer polinomio por cada sumando del segundo, para posteriormente sumar todos esos resultados. Ilustremos con la multiplicación de dos polinomios asociados a dos números binarios, $\boldsymbol{a} = a_1 a_0$, y, $\boldsymbol{b} = b_1 b_0$, es decir:
$P(x) = a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_1 x + b_0$, entonces, $P(x) \times Q(x) = (a_1 x + a_0) \times (b_1 x + b_0) = a_1 x\,(b_1 x + b_0) + a_0\,(b_1 x + b_0) = (a_1\, b_1) x^2 + (a_1\, b_0) x + (a_0 b_1) x + (a_0 b_0) = (a_1\, b_1) x^2 + (a_1\, b_0 + a_0 b_1) x + (a_0 b_0)\, x^0$. Aquí $a_1\, b_0 + a_0 b_1$ puede ser 0, 1, ó, 2. Si es 2, se deja cero en ese nivel y se lleva una unidad al nivel siguiente. En general diremos que la aritmética en estos resultados sigue las reglas del sistema binario.

Cuando las operaciones arriba señaladas se realizan en base dos, el resultado de la multiplicación aparece en forma de polinomio. Por ejemplo si los dos números son $\boldsymbol{a}$ = 11 y $\boldsymbol{b}$ = 11 el producto será, de acuerdo a la última igualdad:

$(1x + 1) \times (1x + 1) = (1\times 1)\, x^2 + (1\times 1 + 1\times 1)\, x + (1\times 1)\, x^0 = (1)\, x^2 + (1 + 1)\, x + (1)\, x^0 = 1x^2 + 10x + 1x^0$.

Aquí hay que dar un paso crucial donde está buena parte de la esencia del algoritmo para la multiplicación. Puesto que la base es dos, en la representación de los números binarios como polinomios, la x es exactamente dos, número que representado en sistema binario es 10, o sea $x = 10$ y la última expresión se convierte en:

$1x^2 + 10x + 1\, x^0 = 1x^2 + x\times x + 1\, x^0 = 1x^2 + 1x^2 + 1x^0 = (1 + 1)\, x^2 + 1\, x^0 = 10x^2 + 1\, x^0 = 1x^3 + 1\, x^0$.

El último paso se da por la misma razón de que $10 = x$.

El producto es entonces:

$11 \times 11 = (1x + 1) \times (1x + 1) = (1)\, x^3 + (0)\, x^2 + (0)\, x^1 + (1)\, x^0 = 1001.$

Esta sencilla operación traducida a sistema decimal es: $3\times3 = 9$. Esto no es otra cosa que un paso adelante en relación a lo que traté en mi artículo *¿Por qué Dos por Dos es igual a Cuatro y no a Tres o a Cinco, por ejemplo*?[18]

Queda flotando la pregunta de por qué la multiplicación de polinomios se hace siguiendo esa regla y no otra. Esto no siempre es así. Se puede definir otro tipo de multiplicación entre entidades que tienen similitud con los polinomios como son los vectores. Allí un tipo de multiplicación, llamada producto escalar de dos vectores, es la suma de los productos de las componentes en su orden y corresponde a un número (escalar). Este producto lo usamos en otro artículo[19] para representar un número real como producto escalar de un vector formado por las potencias de la base en que se representa el número y el vector de sus cifras.

La multiplicación se dice, sin mayor fundamento, que es una suma abreviada. Esto no es cierto en general porque la multiplicación de números reales no lo es. Piense cómo puede ser suma abreviada la multiplicación de π por $\sqrt{5}$, por ejemplo. Keith Devlin ha escrito varias columnas sobre este tema.[20] La división no la estudiamos como una operación en todo su derecho, sino más bien, como la inversa de la multiplicación, es decir, como el proceso que reversa lo que la multiplicación hace con dos números.

Para ilustrar esta sección consideremos el siguiente problema propuesto a estudiantes que terminaron bachillerato[21].

Problema. En la multiplicación de abajo, las letras A, B, C, D, son dígitos diferentes. ¿Cuál es el valor de A + B?

$$\begin{array}{r} \mathbf{ABA} \\ \underline{\times\,\mathbf{CD}} \\ \mathbf{CDCD} \end{array}$$

Antes de abordar la solución hagamos una pequeña reflexión en torno a si el estudiante tiene, o no la formación para interpretar, atacar, resolver y sacar algún provecho de la solución al problema. Como en la mayoría de las preguntas de esta evaluación, en ésta, la respuesta es de selección múltiple, para el caso se dan las siguientes alternativas: 1ª) A+B=1; 2ª) A+B=2; 3ª) A+B=3; 4ª) A+B=4; 5ª) A+B=9. Sólo el 15.9% de los participantes en el examen acertó en la selección de la respuesta correcta. No quiere decir que todos los que acertaron, resolvieron el problema: hay un 20% de probabilidad de acertar escogiendo la respuesta al azar, o sea, por el método del "tinmarín". El porcentaje muestra que seguramente algunos intentaron resolverlo pero llegaron a un resultado equivocado.

[18] En ese trabajo muestro como es posible relacionar las matemáticas de la escuela elemental con las razones que sustentan los algoritmos que tradicionalmente aprendemos mecánicamente.
[19] *Del Bit a las Wavelets*. Publicado en la página Web citada.
[20] Ver la columna *En el Ángulo de Devlin* en: www.matematicasyfilosofiaenelaula.info y su última columna de Enero de 2010 en la página de la MAA.
[21] Dunbar, S. R. et al. *The MAA goes to Middle School* (and How You Can Too). Focus. February 2007.

Para poder interpretar el problema, deberíamos conocer el significado de la notación y la representación en lenguaje matemático del algoritmo implícito en la multiplicación mostrada. Antes de resolver el problema se hace acopio de los recursos matemáticos que se supone uno tiene para aproximarse al problema. Esos recursos son entre otros: el manejo de ecuaciones, las propiedades de los polinomios, la estructura algebraica de los números enteros y sobre todo la experiencia en la solución de problemas matemáticos; lo que George Polya llamaría heurística. Al llevar el problema a lenguaje matemático, ya hay técnicas específicas para encontrar una solución. Este paso siempre es crucial porque no siempre el problema permite en forma fácil su conversión a una ecuación o a un procedimiento netamente matemático. Es la práctica la que da la habilidad y la destreza para resolver problemas. La solución de un problema genera una satisfacción personal y es principalmente por eso que uno resuelve problemas. Las matemáticas no se hacen por mero utilitarismo, la historia muestra que ellas han estado en la cultura humana desde hace miles de años y siempre han venido en ascenso. Las matemáticas que hoy conocemos no son las mismas que aquellas, por ejemplo, cultivadas por los griegos.

Ahora si, volvamos al problema. El algoritmo representado en los símbolos literales de arriba corresponde a la igualdad:

$$(\mathrm{ABA}) \times (\mathrm{CD}) = \mathrm{CDCD},$$

donde A, B, C, D, son dígitos diferentes del sistema decimal. La interpretación de esta igualdad a la luz de lo que hemos visto en párrafos anteriores, es una igualdad de polinomios, del tipo:

$$(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}\,x^1 + \mathrm{A}\,x^0)\times(\mathrm{C}x^1 + \mathrm{D}\,x^0) = Cx^3 + \mathrm{D}x^2 + \mathrm{C}x^1 + \mathrm{D}x^0$$

Donde x =10. Resolviendo los paréntesis tenemos

$$\mathrm{A}Cx^3 + (\mathrm{AD+BC})x^2 + (\mathrm{AC+BD})\,x^1 + \mathrm{AD}\,x^0 = Cx^3 + \mathrm{D}x^2 + \mathrm{C}\,x^1 + \mathrm{D}\,x^0.$$

Decíamos antes que, igualdad de polinomios implica igualdad de sus respectivos coeficientes, por lo tanto se da la siguiente serie de igualdades:

$$\mathrm{AC}=\mathrm{C}; \qquad (\mathrm{AD+BC}) = \mathrm{D}; \qquad (\mathrm{AC+BD}) =\mathrm{C}; \qquad \mathrm{AD} = \mathrm{D}$$

De la primera y la última ecuaciones, supuesto que ni C ni D son cero, se sigue que A = 1. La hipótesis de que C y D no sean nulos es crucial para llegar a la conclusión de que A = 1. Este paso lo podemos dar porque los enteros son un dominio de integridad.[22] Reemplazando en la tercera ecuación a A por 1, tenemos que C+BD = C, o, BD = 0. Como hemos supuesto que D $\neq$ 0, podemos concluir que B = 0. Esta conclusión sólo es válida en dominios de integridad sin divisores de cero como es el caso de los enteros. Así A+B = 1 + 0 = 1. Esto responde la pregunta formulada en el problema. El problema no pregunta ni por C, ni por D, sin embargo uno puede verificar que escogiendo

[22] Un domino de integridad es un anillo conmutativo con 1 ≠ 0 y sin divisores de cero. Los dominios de integridad son conjuntos que sirven como generalizaciones a los números enteros y forman la base para el estudio de la divisibilidad.

arbitrariamente dígitos no nulos C y D, la multiplicación simbólica de arriba se verifica. Por ejemplo tomemos C=9 y D=8, y encontramos con A= 1, B=0,

$$\begin{array}{r} \mathbf{101} \\ \underline{\times\mathbf{98}} \\ \mathbf{9898} \end{array}$$

La solución del problema nos da una lección simple y es que para multiplicar a un número de dos dígitos por 101 el resultado se obtiene escribiendo el número dos veces. Estas pequeñas reglas son las que el calculista profesional memoriza para descrestarnos con su rapidez mental.

10. La división como operación inversa de la multiplicación

Decíamos que, la multiplicación de números se puede asociar unívocamente a la multiplicación de polinomios. Lo mismo vale para la división de números y polinomios, de tal forma que el algoritmo de la división que se cumple en los números enteros se cumple también para polinomios. El algoritmo de la división para polinomios se expresa simbólicamente:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{d}(x)\ \mathbf{Q}(x) + \mathbf{R}(x).$$

Esto traducido a números enteros se lee: *Dividendo es igual a Divisor por Cociente más Residuo*. En el caso de números enteros se exige que el residuo sea igual o mayor que cero y menor que el divisor. Cuando la división es exacta, o sea, cuando **R(*x*)** es cero, decimos que **d(*x*)** divide a **D(*x*)** o que **D(*x*)** es múltiplo de **d(*x*)**.

Consideremos el siguiente ejemplo de la división de dos números en sistema binario p y q, notada simplemente como p/q, cuando p = 10000100, y, q = 1100. Haciendo uso de la representación polinómica tenemos:

$10000100/1100 = (x^7 + x^2)/(x^3 + x^2) = (x^5 + 1)/(x^1 + 1) = (x^1 + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x^1 + 1)/(x^1 + 1) = (x^4 - x^3 + x^2 - x^1 + 1) = 2x^3 - x^3 + 2x - x + 1 = \mathbf{1}\times x^3 + \mathbf{0}\times x^2 + \mathbf{1}\times x^1 + \mathbf{1}\times x^0 = 1011.$

En los pasos anteriores hemos recurrido a la factorización, a la simplificación de fracciones algebraicas y aun a la reducción de términos semejantes, bajando potencias, y recordando que $x = 2$, para mostrar que con los recursos del álgebra se puede simplificar el algoritmo de la división entre números. Observe cómo la simplificación de los ceros en la fracción inicial corresponde a la cancelación del factor común x^2 en la primera fracción algebraica. La factorización de $(x^5 + 1)$ nos permite eliminar el factor $(x^1 + 1)$ del denominador para agilizar los cálculos.

La división inicial puede hacerse en similares términos a como se hace con el algoritmo largo de la división tradicional. Empezando por eliminar los ceros finales en las dos cantidades y continuando con el proceso de dividir reiterativamente entre 11, tenemos:

100´0´0´1´ | 1 1
1 0 0 1011
1 1
0 0

Puesto que el residuo es cero, se concluye que, 10000100/1100 = 1011 y consecuentemente 10000100 = 1100 × 1011.

La enseñanza del algoritmo largo de la división está en la picota de la crítica a la educación matemática a nivel internacional, fundamentalmente en razón a la dificultad que ofrece el proceso mismo. Si realmente queremos que el estudiante aprecie al menos como una curiosidad este proceso ya caído en la obsolescencia al llegar la calculadora, bueno es enseñarle la versión para el sistema binario que ahorra, la parte más engorrosa que es la estimación, por cuanto que, de primera mano uno puede saber si el divisor cabe o no en los dividendos parciales y así el proceso puede continuarse en forma expedita.

El ver a los números como polinomios abre un nuevo panorama para interpretar y descubrir las propiedades de los números naturales. Una propiedad tan simple como ser par o impar aparece obvia cuando se ve con la óptica del sistema binario, pues los números impares terminan en 1 mientras que los pares terminan en cero. Hacer la versión en sistema binario de la teoría de números será todo un reto. Por ejemplo los primos gemelos, aquellos primos que difieren en dos, como 11,13, 17,19, terminarán en **01** y **11** y los números de Fermat, cuya forma estándar es $f(n) = 2^{2^n} + 1$, para $n = 0, 1, 2,\ldots$, por ser 1 más que una potencia de 2 tendrán la cifra **1** al comienzo y al final, los demás dígitos serán ceros. La pregunta que uno se hace es si todos estos números de Fermat son o no primos. Euler probó que no todos son primos, pero George Polya mostró sin embargo que, cualquier par de ellos son primos relativos o primos entre si.

La aritmética o teoría de números como se entiende en el sentido clásico, está por reescribirse usando el sistema binario. Uno espera que las propiedades abstractas de los números sean invariables con respecto al sistema numérico en que los números se representen. Como dijimos, en sistema binario los pares terminan en cero y los impares en 1, de lo cual se desprende una pequeña aritmética donde se puede confirmar que: par + par = impar + impar = par × par = par × impar = impar × par = par, ó, simplificado en aritmética binaria, 0 + 0 = 1 + 1 = 0 × 0 = 0 × 1 = 1 × 0 = 0. De otro lado, par + impar = impar + par = impar × impar = impar, que traducido a aritmética binaria se reduce a: 0 + 1 = 1 + 0 = 1 × 1 = 1. La similitud con las tablas de sumar y multiplicar vistas en la sección 7 es notoria, como muestra la figura, donde: **0** está para representar Par y **1** para representar Impar.

+	**Par**	**Impar**	×	**Par**	**Impar**
Par	**0**	**1**	**Par**	**0**	**0**
Impar	**1**	**0**	**Impar**	**0**	**1**

Tabla de suma y multiplicación de pares (denotados por **0**) e impares (representados por**1**)

11. A manera de conclusión

A lo largo de este trabajo he querido mostrar cómo, la aritmética puede enseñarse con un enfoque diferente haciendo énfasis en la razón de ser de los algoritmos y de la aplicación de conceptos avanzados de matemáticas a la aritmética elemental. Aquí entendemos por avanzados, conceptos como los algebraicos que se estudian en el bachillerato y cuya estructura nos permite realizar ciertas operaciones y generalizaciones que usualmente no se hacen en la primaria. Aunque en un artículo como el presente no podamos cubrir todo el contenido de un currículo elemental, sin embargo, hemos esbozado diferentes temas que pueden estudiarse con el objeto de dar mejor formación matemática al alumno.

En pedagogía nadie tiene la última palabra, por lo tanto las apreciaciones aquí formuladas están abiertas a la discusión y a la experimentación en el aula. Solamente el tiempo y el concurso de buenos docentes pueden certificar si las propuestas que de aquí se derivan pueden tener o no, un carácter de validez.

Editado en Armenia, Colombia, Enero de 2011