

De los Sólidos de Platón a la Teoría de Cuerdas¹

Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío*

"Las ciencias naturales han sido históricamente, una fuente importante de inspiración para las matemáticas. Por lo tanto, es frustrante que al despuntar el siglo XXI, el soporte matemático usado por los físicos para describir las leyes de la naturaleza no esté al alcance del estudiante promedio." [Edward Witten, Medallista Fields 1990: *Physical Law and the Quest for Mathematical Understanding*.]

"Las matemáticas son dinámicas, evolucionan cada día, con nuevos descubrimientos y percepciones que rivalizan con el resto de las ciencias".²
Shing-Tung Yau. Medallista Fields 1982.

"Es un misterio cómo los constructos puramente matemáticos, sin ninguna conexión aparente con el mundo real, pueden sin embargo, describir nuestro mundo con acertada propiedad." Eugene Wigner, Premio Nobel en Física 1963. *La Irrazonable Efectividad de las Matemáticas en la Naturaleza*.

Resumen

Se pretende aquí describir sucintamente algunas conexiones entre los espacios abstractos, hoy llamados espacios de Calabi-Yau y la plataforma matemática que sirve de soporte a la teoría de cuerdas, ese nuevo campo de la física que aspira ser el modelo que explique el comportamiento de todas las fuerzas de la naturaleza.

Abstract

The aim of this paper is to describe succinctly some relationships between some abstract spaces like Calabi-Yau and the math platform upon which is sustained string theory. String theory promises to be the new model where all natural forces could be explained.

1 – Introducción.

En Julio 4 de 2012 los medios hicieron eco a la noticia del reconocimiento de nuevas partículas elementales por parte de científicos del Large Hadron Collider (LHC) en Suiza. Estas partículas con masas de 125 y 127 GeV/c^2 sospechaban los físicos podrían ser bosones de Higgs, según el modelo estándar de la física de partículas. El llamado bosón de Higgs es una partícula energética propuesta por Peter Higgs en los años 60's del siglo pasado, capaz de transmitir fuerza, al igual que el fotón transmite luz y los hipotéticos gravitones conducen la gravedad. Los bosones (para la energía) y fermiones (para la masa) son en la teoría cuántica las grandes categorías en que se dividen las partículas elementales. Hasta la fecha (14 de Marzo de 2013) las evidencias recibidas del CERN (sigla en francés para el Centro Europeo de Investigación Nuclear) en Ginebra, refuerzan la confianza de que la nueva partícula corresponde al bosón de Higgs en el modelo estándar de la física de partículas.

¹ Una versión de este trabajo se expuso como cierre del curso de postgrado de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Caldas. Noviembre de 2012.

² Shing-Tung Yau, Steve Nadis. *The Shape of Inner Space. String Theory and the Geometry of Universe's Hidden Dimensions*. Basic Books. New York. 2010.

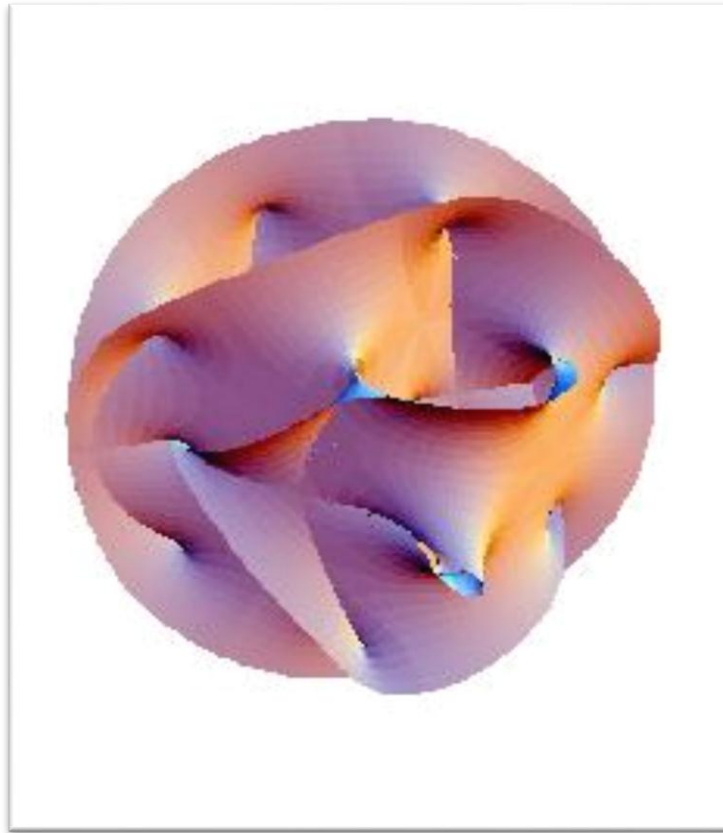


Figura 0. Un corte bidimensional de un espacio de Calabi-Yau. Estos espacios tienen seis dimensiones y poseen tipos de simetría muy interesantes a tal punto que los defensores de la teoría de cuerdas sostienen que la física de nuestro universo es consecuencia de la geometría de los espacios de Calabi-Yau.³

El despliegue noticioso tiene su origen en la enorme expectativa que despierta, de un lado, la aparición de una sub partícula atómica nueva y de otro el hecho que, el bosón de Higgs fue una predicción teórica sólo obtenible hasta ahora en un acelerador tan potente como el LHC.

Los físicos teóricos, Maximilian Kreuzer y Harald Skarke a fines del los años de 1990, trabajaron en la clasificación de unos objetos geométricos de dos y tres dimensiones conocidos como politopos reflectivos. Su motivación radicaba en el hecho que cada familia de estos politopos origina un espacio de Calabi-Yau útil para modelar las dimensiones extras de nuestro universo. Los politopos reflectivos vienen en parejas, conocidas como “pares especulares” que al convertirlos en espacios originan una propiedad que los físicos llaman simetría especular.

En este trabajo queremos dar una simplificada versión de cómo partiendo de cosas tan simples como arreglos poligonales de puntos podemos llegar a los espacios de Calabi-Yau y de pasada describir

³ Imagen tomada de la página de Andrew J. Hanson: <http://www.cs.indiana.edu/~hanson/>

aunque en forma somera los rudimentos básicos de la teoría de cuerdas, que es una de las líneas de investigación muy en moda en la física de nuestro tiempo.

Nuestro soporte para escribir este artículo radica en los artículos *From Polygons to String Theory*⁴, *String Theory and the Geometry of Universe's Hidden Dimension's*⁵ y el libro de Shing-Tung Yau, *The Shape of Inner Space*⁶. Algunas consultas a la fecha provienen principalmente de la versión inglesa de *Wikipedia* y de algunas páginas de internet que se citan en el curso de la exposición.

2 – Física y Matemáticas.

Comenzando el siglo XX aparecieron la física relativista de Einstein y la mecánica cuántica. Tanto la una como la otra originaron una verdadera revolución en la nueva interpretación del mundo. La *teoría del campo unificado*, propuesta por el mismo Einstein y nunca encontrada por él, se proponía buscar una plataforma teórica en donde se logaran encuadrar todas las fuerzas de la naturaleza, que junto a la materia, interactúan en el mundo físico. Estas fuerzas son:

- Fuerza nuclear fuerte que mantiene en su lugar el núcleo atómico.
- Fuerza nuclear débil responsable de la radioactividad.
- Fuerza electromagnética que actúa entre las partículas cargadas eléctricamente.
- Fuerza gravitacional originada en la atracción por efecto de la masa de las partículas.

La teoría del campo unificado ha devenido en una nueva teoría, la *teoría de cuerdas*, que busca explicar el comportamiento de estas fuerzas en espacios más allá del espacio-tiempo propuesto por la teoría de la relatividad y la mecánica cuántica.

La teoría de cuerdas se construyó sobre la hipótesis de que las partículas en su nivel básico están constituidas por minúsculas cuerdas vibrantes de una dimensión. La teoría de cuerdas ha tenido entre sus principales líderes a Edward Witten del Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Princeton, quien cree que la teoría es demasiado buena para no ser cierta. Witten es considerado uno de los grandes físicos y matemáticos de nuestra era, y según Keith Devlin es de la estatura científica de Isaac Newton⁷. Witten fue medallista Fields en 1990, constituyéndose en el primer físico en recibir esta distinción, equiparable a un premio Nobel, en el campo de las matemáticas.

Newton debió crear sus propias matemáticas, el cálculo infinitesimal, por ejemplo, para la interpretación del mundo físico, que tomó cuerpo en su magna obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (*Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, 1687). Siguiendo la brecha abierta por Newton, David Hilbert⁸ a comienzos del siglo XX también debió ampliar los horizontes de las

⁴ Doran, C. F., et al. *From Polygons to String Theory*. Mathematical Magazine. Vol. 85, No. 5, December 2012.

⁵ Yau, S-T, et al. *String Theory and the Geometry of Universe's Hidden Dimension's*. Notices of the American Mathematical Society, Vol. 58, No. 8, September 2011.

⁶ Yau, S-T, et al. *Opus cit.*

⁷ Devlin, K. *Witten at 50*. Devlin's Angle, July/August 2000. Puede leerse en:

http://www.maa.org/devlin/devlin_7_01.html

⁸ Una biografía corta de Hilbert se encuentra en: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hilbert.html> Sobre su obra y su influencia ver: David Hilbert y su Escuela en: <http://www.matematicasyfilosofiaenlaura.info/historiam.htm>

matemáticas para encuadrar sus aportes a la física a través de su obra *Los Métodos de la Física-Matemática*, Vols. 1,2, publicado inicialmente en 1924.

Iniciando el siglo XXI, Edward Witten repite la hazaña de Hilbert al crear las matemáticas para la naciente teoría de cuerdas. Estas matemáticas incluyen los llamados espacios *Calabi-Yau*, que Shing-Tung Yau⁹ había introducido en la prueba de la conjetura de Calabi.

Demócrito (siglo V, AC) sostenía que la realidad física aparecía en razón a dos elementos básicos: el átomo y el vacío. Los átomos, indivisibles, inmutables, eternos, puntuales o de dimensión nula, eran los constituyentes de la materia. El vacío, al contrario, es el espacio carente de átomos y donde los mismos átomos se mueven. La física moderna, en contraste, parte del hecho experimental de que el átomo es divisible y que sus constituyentes, electrones, positrones, neutrón, protón, etc., no son eternos y que su vida media puede calcularse y que inclusive hasta el protón puede degradarse si se le da suficiente tiempo.

Aunque la física como ciencia independiente es reciente en comparación con las matemáticas, sin embargo, su desarrollo ha estado hermanado al auge y decadencia de las matemáticas. Desde el siglo III A. C., cuando Arquímedes formuló las leyes para la palanca y las poleas, los principios en hidrostática e inició el cálculo integral, la física era parte de las matemáticas. Newton y Leibniz dieron gran impulso a la física y en particular a la mecánica con el recurso del cálculo infinitesimal inventado por ellos. En los siglos XVII y XVIII, matemáticos como Galileo, Pascal, Descartes, Huygens, los Bernoulli y Euler fueron sentando las bases para que la física se constituyera en ciencia independiente apoyada siempre con el recurso de las matemáticas. Los trabajos de Carl Friedrich Gauss contribuyeron a que el siglo XIX fuera el despegue definitivo de la física en sus diferentes ramas.

Como un ejercicio de conteo, a lo largo de este trabajo iremos citando las áreas de las matemáticas donde podemos encontrar el estudio sistemático de los tópicos aquí descritos someramente. Este ejercicio busca destacar la enorme conexión entre la física de nuestros días y la tradición matemática que se asienta desde los albores de la civilización occidental en los valles de la Mesopotamia hasta las matemáticas de hoy día que involucran el estudio de los espacios de Calabi-Yau. Empecemos este conteo con la **Geometría** y la **Teoría de Números**¹⁰ que tienen su origen axiomático en los trabajos de Euclides (siglos III A.C.).

3 – Teoría de Cuerdas y Dimensión del Espacio Físico.

Decíamos que la ilusión de Einstein era hallar una teoría para el campo unificado. Esta ilusión se ha mantenido entre los físicos de partículas desde mediados del siglo XX y a lo largo de los últimos

⁹ Shing-Tung Yau fue ganador de la Medalla Fields en 1972 precisamente por haber probado la conjetura de Calabi. Fue discípulo del afamado matemático chino Shiing-Shen Chern.

¹⁰ Este conteo lo vamos a resaltar citando una obra clásica sobre el tema relacionado en el área que paulatinamente vamos tocando. Esta enumeración se inicia con [1] en la bibliografía al final en que citamos *Los Elementos* de Euclides en donde aparece la geometría en un contexto axiomático y la teoría de números iniciando su largo recorrido histórico, tan vigente ayer como hoy.

años han venido trabajando con esa perspectiva en un proyecto que hoy se conoce con el nombre de *Teoría Unificada Mayor (Grand Unified Theory)*. Esta teoría busca unificar la teoría general de la relatividad y la física cuántica. La teoría en que se fundamenta la física cuántica, describe el comportamiento de las partículas elementales en el microcosmos (verbigracia, electrones, quarks¹¹, neutrinos), que contrasta con lo que estudia la teoría general de la relatividad como son las leyes que rigen el comportamiento de las estrellas, galaxias y agujeros negros en el espacio interestelar, por ejemplo.

4 – Algunas ideas sobre Dimensión. La teoría de cuerdas asume que el espacio-tiempo está dotado de un total de diez dimensiones. Las primeras cuatro corresponden a las tres dimensiones del espacio euclídeo usual, más la dimensión extra del tiempo; las seis dimensiones restantes, ocultas en la estructura interna del espacio-tiempo, se asocian a un espacio de Calabi-Yau alojado en cada punto como se muestra en la Figura 1. Este modelo de espacio físico fue propuesto originalmente por los físicos de comienzos del siglo XX, Theodor Kaluza (1885-1954) y Oskar Klein (1894-1977).

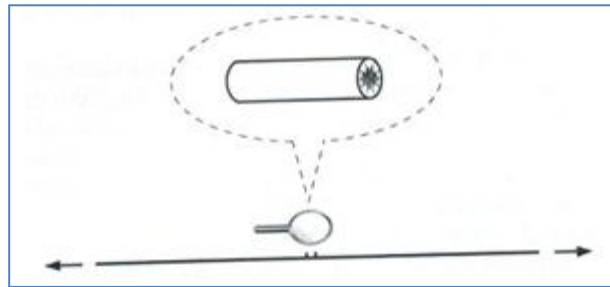


Figura 1. Modelo de Kaluza-Klein recobrado por algunos físicos modernos de la teoría de cuerdas, para quienes el espacio físico se asimila a una recta que aglutina el espacio-tiempo (las tres dimensiones del espacio euclídeo y el tiempo) pero que si se examina con un potente microscopio esta recta está constituida de circunferencias en el interior de la cuales aparecen seis dimensiones más, arropadas en un minúsculo espacio geométrico hoy conocido como Variedad de Calabi-Yau (Figura tomada de Yau, S-T, et al. *Op. Cit.* Ver nota 4).

En topología hay un espacio de dimensión cero que es el punto; solamente dos espacios de dimensión 1 (Figs. 2 y 3) que son sustancialmente diferentes: la recta y la circunferencia. En ellos hay un grado de libertad, lo que quiere decir que un objeto que vive en ellos puede moverse, en el primer caso horizontalmente, hacia adelante o hacia atrás y en el segundo caso circularmente, en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario de las manecillas del reloj. Estos espacios topológicos se denominan genéricamente *variedades* y existen en todas las dimensiones. Entre las propiedades de las variedades figura una muy particular y es que, a nivel local, o dicho matemáticamente, las vecindades de un punto lucen como en el espacio euclídeo, si es de dos dimensiones sus vecindades

¹¹ Un quark es una partícula elemental constituyente de la materia. Los quarks se combinan para formar partículas compuestas, conocidas como hadrones, las más estables de las cuales son los protones y los neutrones, que conforman el núcleo atómico. Los neutrinos, son subpartículas sin carga eléctrica, de masa muy pequeña. Un típico neutrino pasa por la materia como lo hace un fotón a través del cristal.

lucen planas como ocurren en el plano euclídeo. Piense por ejemplo, lo que hace Google con sus mapas, toma una región de la tierra y la convierte en un mapa, esto es, en la representación de esa región (que en la realidad es curva) en una superficie plana. Otra propiedad de las variedades es el hecho de ser lisas, en el sentido de que no tienen rupturas ni saltos bruscos, aunque puedan tener singularidades aisladas. Hay variedades complejas, caso en el cual sus dimensiones son pares, por cuanto que un número complejo $z = x + iy$, se puede expresar como el par (x, y) , donde x y y son reales. La geometría riemanniana¹² puede interpretarse como una generalización de la geometría euclidiana para incluir variedades con curvatura [2].





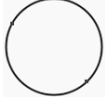


Nombre	Imagen	V	E	F	Género g	Dimensión	$\chi = V - E + F$ $\chi(g) \equiv 2 - 2g$ Característica de Euler
Hexaedro o Cubo		8	12	6	0	2	2
Tetraedro		4	6	4	0	2	2
Esfera		4 6 8 10	6 12 18 24	4 8 12 16	0	2	2 2 (Ver Imagen) 2 2
Intervalo		2 3 4	1 2 3	0 0 0	0	1	1 (Ver Imagen) 1 1
Circunferencia		2 3 4 5	2 3 4 5	0 0 0 0	0	1	0 (Ver Imagen) 0 0 0
Toro (Producto de dos Circunferencias)		0	2	2	1	2	0
Toro Doble		0	4	2	2	2	-2

Figura 2. Algunas variedades de dimensión 1 y 2 con su respectiva característica de Euler a la derecha. Las letras V, E, F, representan el número de vértices, aristas y caras, respectivamente. Tomada de: <http://universe-review.ca/R15-27-Euler2.htm>.

¹² Ver el capítulo sobre geometría de Riemann en mis notas de epistemología de las matemáticas en: <http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Geometria%20de%20Riemann.pdf>

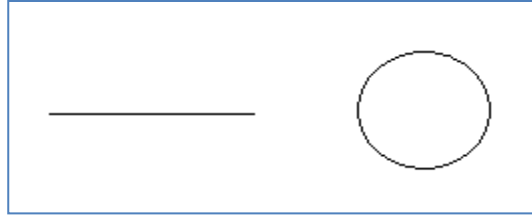


Figura 3. En topología los **espacios** o **variedades** se clasifican según su dimensión. El punto es una variedad de dimensión cero. Hay dos variedades de dimensión uno, que se muestran en la figura: la recta y la circunferencia, en las cuales existe solo un grado de libertad, se puede uno desplazar horizontalmente o en forma circular, adelante o atrás en el caso de la recta, o cuando se está en la circunferencia, en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario de las manecillas del reloj.

Hay solamente dos variedades o espacios de dos dimensiones, en este caso las llamaremos superficies, como es la esfera hueca, que se denota por S^2 , que en el espacio tridimensional euclídeo corresponde al conjunto de los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el toro o la superficie de lo que corrientemente llamamos una dona o rosca (Fig. 3). Las superficies orientables (que tienen anverso y reverso) de dos dimensiones pueden clasificarse según el número de agujeros (según su género se dice en topología algebraica). La superficie esférica es de género cero por no tener huecos, lo que realmente significa que, si se toma un arco cerrado este puede contraerse continuamente hasta convertirse en un punto.

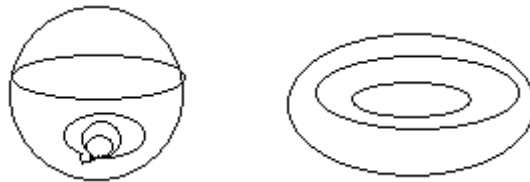


Figura 4. La 2-esfera, S^2 (izquierda) corresponde a la superficie de la esfera en el espacio tridimensional. El toro (derecha) es una variedad bidimensional que a diferencia de S^2 , no toda curva cerrada simple se puede contraer a un punto.

El toro que se asemeja a la superficie de una dona es también de dimensión dos pero tiene género 1 por tener un solo hueco. En este caso no todo arco cerrado puede contraerse en un punto. Hay toros de género 2, 3, ..., etc. , según el número de huecos que tenga (Fig. 2).

La topología es un área de las matemáticas que estudia los espacios en general y no toma en consideración la medida de distancias o la forma geométrica de las figuras. En efecto, para la topología es lo mismo una dona que un mug, pues la una puede deformarse en el otro sin romperse; aunque las dos superficies tengan diferente forma. Las superficies de los sólidos de Platón, figura 3, por ejemplo, son topológicamente equivalentes a la superficie de la esfera S^2 . [Para mayor información sobre métricas sobre la esfera ver mi artículo *Métricas, Geometrías y Trigonometrías en: <http://www.matematicasyfilosofiaenl aula.info/conferencias.htm>*]. Las variedades vienen en diferentes dimensiones como hemos dicho, pero las que estudiamos aquí tienen la característica adicional de ser suaves en el sentido de que en lo local se asemejan a una superficie euclídea y en el aspecto global muestran su curvatura. Las variedades que veremos son cerradas y finitas o como se

dice en matemáticas, compactas. Las variedades también pueden ser complejas en el sentido de que tendrán dos ejes: el real y el imaginario y así sus dimensiones siempre serán de carácter par. La geometría de Riemann será una extensión de la geometría de Euclides en la que se incluye el concepto de curvatura, lo que permitirá crear nuevas fórmulas para el cálculo de ángulos, longitudes de arco, áreas, volúmenes, etc.

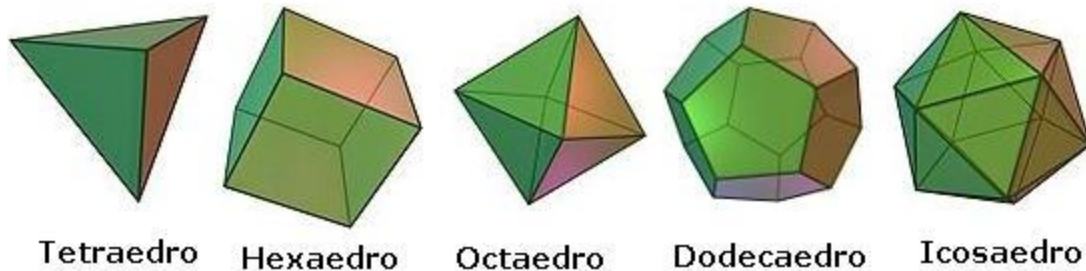


Figura 5. Los sólidos platónicos. En su orden: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro son topológicamente equivalentes a S^2 (la esfera hueca), pues cada uno de ellos puede deformarse continuamente (sin rasgarse) hasta tomar la forma de la esfera.

Politopos y su Construcción.

Una red \mathbf{N} en el plano, es el conjunto de puntos del plano con coordenadas enteras. Una red puede definirse como el producto cartesiano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, es decir, $\mathbf{N} = \{(x, y) : x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$. Llamaremos *politopos* a los polígonos cuyos vértices son puntos de la red. Una clase importante de politopos son aquellos que contienen a $(0,0)$ como único punto interior y en matemáticas se conocen como *politopos de Fano*, en memoria del geómetra italiano Gino Fano (1871-1952). Los politopos pueden extenderse, como veremos adelante, a espacios de dimensiones diferentes a dos.

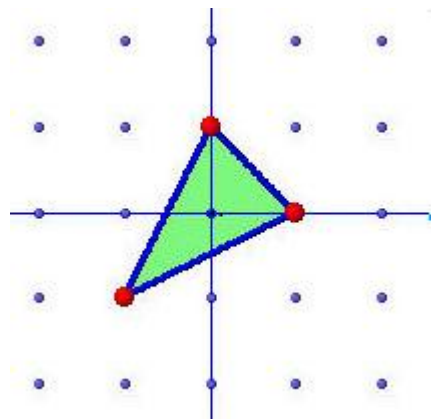


Figura 6. Una red en el plano en donde se ha construido un politopo triangular con vértices en puntos de coordenada enteras, en este caso en: $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, -1)$. Politopos como éste, que contienen en su interior al origen $(0, 0)$ como único punto interior de la red, se conocen como *politopos de Fano*.

El politopo \mathcal{P} de la figura 6 es un ejemplo de un politopo de Fano que se puede identificar por sus vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1, -1)$. Partiendo de este politopo podemos construir politopos similares por rotación de 90 grados o por reflexión alrededor del eje x o por alargamiento en alguna dirección predeterminada. Si el alargamiento lo hacemos en el sentido del eje x , digamos, llevando el punto (x, y) al lugar $(x + y, y)$, ese tipo de acción es un ejemplo de lo que en algebra lineal [3] se denomina una transformación lineal que puede encomendarse a la matriz 2×2 , definida por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. En efecto el punto $X = (x, y)$ visto como una matriz puede representarse como $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, y así

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz A cumple el encargo de llevar el punto (x, y) al lugar $(x, x+y)$. Así, nuestro politopo \mathcal{P} de la figura 4 se convertirá en el politopo \mathcal{Q} con vértices:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 0 \end{bmatrix} = (1, 0); \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1 \end{bmatrix} = (2, 1); \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+(-1) \\ -1 \end{bmatrix} = (-2, -1).$$

O sea que nuestro politopo resultante es el lugar geométrico de los puntos que caen en o dentro de la periferia del triangulo de la figura 7b.

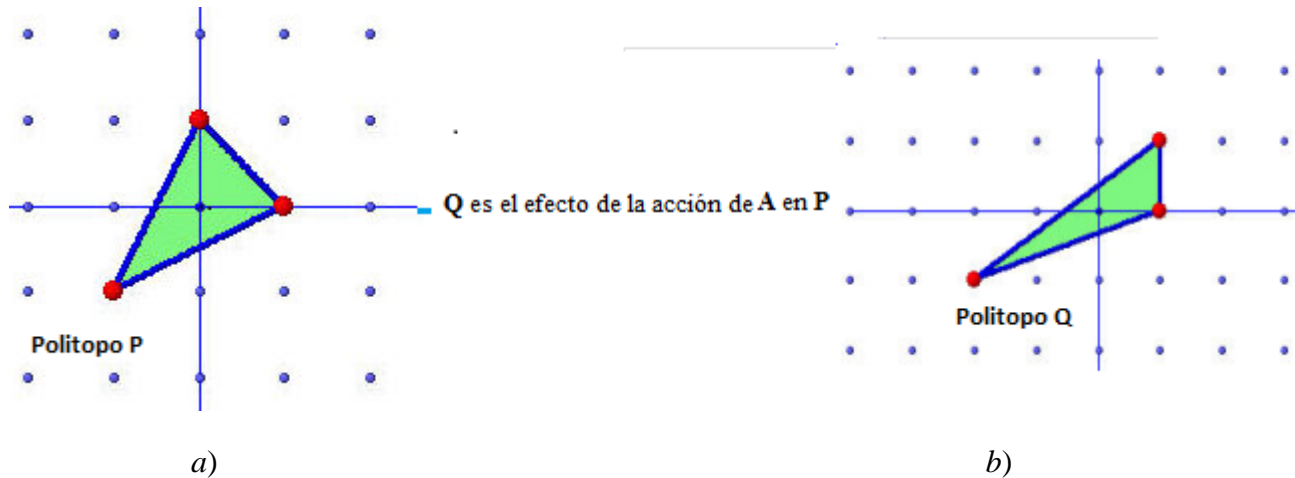


Figura 7. El politopo \mathcal{P} de la parte a) se transforma en el politopo \mathcal{Q} de la parte b) por efecto de la matriz A . La transformación lineal A preserva la propiedad de ser politopo de Fano. Transformaciones como las efectuadas por A se conocen como elongaciones.

5 – Clasificación de los Politopos.

Es conveniente clasificar los politopos de Fano en familias que compartan propiedades comunes. Nos gustaría poner en la misma clase a todos aquellos a los que se pueda acceder a partir de un politopo

dado a través de: reflexiones, rotaciones o elongaciones. Estas operaciones son transformaciones lineales representables como matrices del tipo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, donde a, b, c, d , para nuestro caso son enteros. La transformación

$$m_A: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow AX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exige que las componentes a, b, c, d , de la matriz A sean enteras para que lleve puntos reticulares en puntos reticulares. Además si queremos que nuestro polígono se transforme en otro polígono que permita reversar la acción para llegar al punto de partida debemos exigir que A sea invertible y así m_A será una función uno a uno de \mathbf{Z}^2 en \mathbf{Z}^2 . Finalmente debemos exigir que la inversa A^{-1} devuelva polígonos reticulares en polígonos reticulares, es decir A^{-1} debe tener entradas enteras.

Por definición, la inversa de una matriz A tiene la propiedad $AA^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y por las propiedades de los determinantes $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$. De donde se sigue que $\det(A)$ y $\det(A^{-1})$, deben ser ambos, 1, ó, -1. Esto significa que la matriz A debe satisfacer la condición, $\det A = \pm 1$.

Recogiendo las ideas esbozadas en el párrafo anterior podemos dar una definición de un grupo algebraico muy importante.

Definición 1. El grupo lineal general de matrices 2×2 en \mathbf{Z} , notado como $\mathbf{GL}(2, \mathbf{Z})$, se define como:

$$\mathbf{GL}(2, \mathbf{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbf{Z}, ad - bc = \pm 1 \right\}.$$

Este es un importante grupo de matrices que aparece muy a menudo en diferentes áreas de las matemáticas. El concepto de grupo [4] es crucial tanto en matemáticas como en física y es la abstracción de muchas características que acompañan a la naturaleza, entre ellas la simetría. Las matrices $\mathbf{GL}(2, \mathbf{Z})$ contienen las matrices responsables de las rotaciones, reflexiones, elongaciones descritas antes y en general composiciones entre ellas.

Las funciones que las matrices representan son transformaciones lineales continuas sobre la red \mathbf{N} en sí misma. En general una matriz se comporta como una función lineal corriente del tipo $y = ax$, cuya representación en el plano es una recta (de allí el nombre de lineal), pero para nuestro caso x, y , y son vectores y a es una matriz, 2×2 , llevando vectores de un plano en otro. Los vértices de un polígono van a los vértices del otro polígono con la propiedad de que el único punto red en el interior del politopo es el origen $(0, 0)$. En conclusión esta transformación lineal lleva polígonos de Fano en polígonos de Fano.

Definición 2. Dos polígonos de Fano \mathcal{P} y \mathcal{Q} son equivalentes si existe una matriz A en $\mathbf{GL}(2, \mathbf{Z})$, tal que $A \mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

La relación de equivalencia inducida acorde a la anterior definición, reduce los polígonos de Fano solamente a 16 clases diferentes, en el sentido de que cualquier polígono de Fano cae en una de estas clases.

A lo largo de este texto hemos indistintamente usado las palabras polígono o politopo. Sin embargo la diferencia va a aparecer más adelante. Por ahora empecemos por describir lo que matemáticamente significamos por polígono. Una forma de describir un polígono es señalar sus vértices. En el caso de la figura 6, los vértices son $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(-1, -1)$. También podemos describirlo por los segmentos que unen sus vértices; para el ejemplo en cuestión, ellos son parte de las rectas que pasan por estos vértices; específicamente ellas son:

$$-x - y = -1$$

$$2x - y = -1$$

$$-x + 2y = -1$$

Sin embargo, si queremos describir el triángulo completo incluyendo sus borde tenemos que recurrir a las desigualdades simultáneas

$$-x - y \geq -1$$

$$2x - y \geq -1$$

$$-x + 2y \geq -1$$

Una forma de describir los espacios de Hilbert [5] es definiendo al interior de un espacio de Banach un producto interno, como lo hacemos en \mathbf{R}^n , por ejemplo definiendo el producto interno p de dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ como la suma de los productos en su orden de las componentes de cada vector, más explícitamente:

$$p(x, y) = x \bullet y = \sum_1^n x_i y_i$$

Con el recurso de este producto podemos simplificar la escritura del sistema de ecuaciones de arriba, como:

$$(-1, -1) \bullet (x, y) = -1$$

$$(2, -1) \bullet (x, y) = -1$$

$$(-1, 2) \bullet (x, y) = -1$$

Los puntos $(-1, -1)$, $(2, -1)$, $(-1, 2)$ originan un nuevo triángulo que llamaremos el triángulo *polar* asociado al triángulo original (Figura 8 Derecha). Si partiéramos del triángulo polar derecho, siguiendo el proceso descrito, llegaremos al triángulo de la izquierda, con lo que podemos sostener que la relación de polaridad es simétrica, en el sentido de que si el polígono P es el polar de Q entonces el polígono Q es el polar de P . Simbólicamente, si $P = Q^p$ entonces, $Q = P^p$. De donde se sigue que $P = (P^p)^p$.

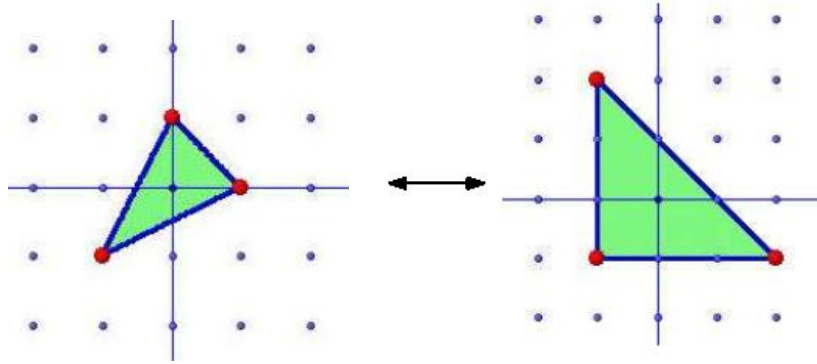


Figura 8. El triángulo de vértices en $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, a la izquierda; tiene como triángulo polar aquel cuyos vértices están en $(-1, -1)$, $(2, -1)$ y $(-1, 2)$ que aparece a la derecha. Nótese que los dos triángulos son polígonos de Fano. Además cada uno de ellos es el polígono polar del otro.

No siempre el polígono polar de un polígono dado tiene sus vértices en puntos reticulares.

Definición 3. Asumamos que P es un polígono reticular. Si P^p es también un polígono reticular, decimos que P es *reflexivo*.

Si P es un polígono reflexivo, entonces su polar P^p , es también reflexivo. Al par (P, P^p) se lo conoce como *par especular* o como una pareja reflectiva. El término reflectivo hace alusión a esta propiedad, es decir, el uno es el reflejo del otro. No fue casualidad que el triángulo del ejemplo anterior resultara reflectivo, pues es precisamente el hecho de ser un polígono reticular de Fano que lo hace reflectivo como lo afirma el siguiente teorema que enunciamos sin demostración.

Teorema. *Un polígono reticular es reflectivo si y solo si, tiene la condición de Fano (su único punto interior reticular es el origen).*

Las parejas reflectivas están íntimamente relacionadas. Por ejemplo, ellas tienen el mismo número de vértices y aristas. Además los puntos reticulares en la frontera del uno más el número de puntos reticulares en la frontera de su dual siempre suman 12. Ver por ejemplo lo que ocurre en el caso de los dos triángulos del ejercicio de arriba, donde se cumple que $3+9 = 12$, 3 es el número de puntos reticulares en la periferia del primer triángulo y 9 es el número de puntos reticulares en la frontera del

segundo triángulo. Para la demostración de este hecho mirar el artículo de Fernando Rodríguez Villegas¹³.

6 – Polítopos, Series de Laurent y Espacios de Calabi-Yau

Los ejemplos que hemos visto hasta aquí se han reducido a dos dimensiones y el énfasis se hace en los polígonos de Fano. Veamos cómo esta idea se puede extender a otras dimensiones, empezando con uno y continuando con tres o más dimensiones

Definición 4. Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ un conjunto de puntos en \mathbf{R}^k . El *politopo* con vértices en $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$ es el conjunto de puntos de la forma

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=q} t_i \vec{v}_i, \text{ Donde los } t_i \text{ son números reales no negativos tales que } t_1 + t_2 + \dots + t_q = 1.$$

En este caso también se dice que el politopo es la *cubierta convexa* del conjunto de puntos $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_q\}$.

El caso más sencillo de un politopo ocurre cuando la dimensión es 1 y el politopo se reduce al intervalo $[-1, 1]$ o sea al conjunto de puntos de la recta que pueden describirse como $(1)t_1 + (-1)t_2$, $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$ y que $t_1 + t_2 = 1$ (Figura 9). Este politopo de Fano queda determinado por sus tres vértices $-1, 0$ y 1 , y las aristas $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.

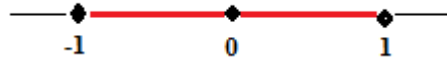


Figura 9. Los puntos x que están en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ conforman un politopo de dimensión 1, con vértices en (-1) , (0) y (1) y aristas los subintervalos: $[-1, 0]$ y $[0, 1]$.

Es usual en los espacios abstractos como \mathbf{R}^k , tomar copias del mismo para llevar funciones de una copia a la otra. Supongamos que tenemos dos copias \mathbf{N}_R y \mathbf{M}_R de \mathbf{R}^k y en cada una de ellas las redes N y M . En $\mathbf{N}_R \times \mathbf{M}_R$, se puede definir el producto interno de los vectores (n_1, \dots, n_k) y (m_1, \dots, m_k) así:

$$(n_1, \dots, n_k) \cdot (m_1, \dots, m_k) = n_1 m_1 + \dots + n_k m_k.$$

Si los puntos están en los retículos N y M el producto será un número entero. Con la definición de producto interno ahora podemos introducir el politopo polar a uno dado Δ en N , que contiene el origen. Notemos este nuevo politopo como Δ^o . Entonces Δ^o es el politopo en M dado por

¹³ Fernando Rodríguez Villegas, Bjorn Poonen. *Lattice Polygons and the Number 12*. The American Mathematical Monthly. Vol. 107. No. 3. March 2000.

$$\{(m_1, \dots, m_k): (n_1, \dots, n_k) \cdot (m_1, \dots, m_k) \geq 1, \text{ para todo } (n_1, \dots, n_k) \in \Delta \}.$$

Diremos que un politopo es de Fano si el único punto reticular interno es el origen. Diremos también que un politopo reticular que contiene al origen es reflectivo si su politopo polar es también reticular.

Ejemplos de politopos tridimensionales son el cubo y el octaedro que están entre los llamados sólidos de Platón (figura 3). La clasificación de los politopos reflectivos en general es un problema abierto. Se sabe como ya lo vimos que hay un solo politopo reflectivo de dimensión 1, 16 clases de politopos reflectivos de dimensión 2 y se conoce el número de clases para el caso de dimensiones 3 y 4, pero en general no sabemos qué ocurre para dimensiones mayores o iguales que cinco.

De aquí en adelante trataremos con politopos reflectivos. Cuando uno trabaja con polinomios de una sola variable del tipo,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Puede pensarlos como el producto interno de los vectores $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Y más aun, si se trata de polinomios de varias variables complejas z_i podemos identificar las variables de acuerdo a la convención:

$$z_1 \leftrightarrow (1, 0, \dots, 0); z_2 \leftrightarrow (0, 1, \dots, 0); \dots; z_n \leftrightarrow (0, 0, \dots, 1)$$

Tratándose de monomios de varias variables complejas usaremos la siguiente notación:

$$(m_1, \dots, m_k) \leftrightarrow z_1^{m_1} z_2^{m_2} \dots z_k^{m_k}.$$

Finalmente estos monomios se pueden multiplicar por parámetros complejos α_j y sumarse entre si para generar polinomios de varias variables complejas. Si los exponentes recorren la red de dimensión k , los polinomios pueden tener exponentes negativos dando origen a los llamados *polinomios de Laurent*, muy importantes en variable compleja.

Para explicar el procedimiento que conduce a los espacios de Calabi-Yau partiendo de politopos reflectivos, empecemos por el caso más simple: el intervalo $[-1,1]$ de la figura 7, que tiene por politopo polar Δ^0 , al mismo intervalo. Tomemos como Δ a $[-1,1]$. Como este politopo tiene dimensión uno sólo es necesario un vector para generar todos los puntos de este intervalo; en efecto, 1 genera todos los puntos del intervalo. Correspondiente a este vector asociamos naturalmente el monomio z_1 . Los otros vértices del politopo son -1 y 0 a los que se asocian los monomios z_1^{-1} y $z_1^0 = 1$. Multiplicando cada monomio por los respectivos parámetros complejos llegamos a una familia de polinomios de Laurent del tipo:

$$\alpha_{-1}z_1^{-1} + \alpha_0z_1^0 + \alpha_1z_1^1.$$

Donde el polinomio depende de los parámetros complejos $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$ y $z_1 \neq 0$.

Otro caso interesante ocurre cuando tomamos el politopo de nuestra figura 6 a, cuyos vértices son: $(-1,-1)$ $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$. Aquí tenemos un caso de dos dimensiones, por lo tanto aparecen dos

variables complejas z_1 y z_2 . Su triángulo polar aparece en la figura 6 *b*, que contiene diez puntos reticulares incluyendo el origen. Esto induce un total de 10 monomios, específicamente: $(-1,2) \rightarrow z_1^{-1}z_2^2$; $(-1,1) \rightarrow z_1^{-1}z_2^1$; $(0,1) \rightarrow z_1^0z_2^1$; $(-1,0) \rightarrow z_1^{-1}z_2^0$; $(0,0) \rightarrow z_1^0z_2^0 = 1$; $(1,0) \rightarrow z_1^1z_2^0$; $(-1,-1) \rightarrow z_1^{-1}z_2^{-1}$; $(0,-1) \rightarrow z_1^0z_2^{-1}$; $(1,-1) \rightarrow z_1^1z_2^{-1}$; $(2,-1) \rightarrow z_1^2z_2^{-1}$.

El correspondiente polinomio general de Laurent para este politopo es entonces

$$\alpha_1 z_1^{-1} z_2^2 + \alpha_2 z_1^{-1} z_2^1 + \alpha_3 z_2^1 + \alpha_4 z_1^{-1} + \alpha_5 + \alpha_6 z_1^1 + \alpha_7 z_1^{-1} z_2^{-1} + \alpha_8 z_2^{-1} + \alpha_9 z_1^1 z_2^{-1} + \alpha_{10} z_1^0 + \alpha_{11} z_1^2 z_2^{-1}.$$

Y la familia especular de polinomios de Laurent para el politopo reflejo, con ajuste apropiado de variables es

$$\beta_1 \omega_1^{-1} \omega_2^{-1} + \beta_2 \omega_2 + \beta_3 + \beta_4 \omega_1$$

Cuando un polinomio se iguala a cero se origina una ecuación que presume una incógnita. La solución de esta ecuación puede generar valores numéricos o la aparición de interesantes funciones como ocurre en los casos que estamos considerando. Estas funciones representan espacios, a veces en forma de curvas, o de superficies o variedades de mayor dimensión.

Examinemos el primer polinomio asociado a $[-1,1]$, encontrado arriba, escogiendo algunos valores de los parámetros α . Al tomar $\alpha_{-1} = -1$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, por ejemplo, hallamos que: $-z_1^{-1} + z_1 = 0$. Resolviendo, $z_1^2 = 1$ encontramos dos soluciones reales que $z_1 = \pm 1$. Sin embargo al tomar $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, llegamos a $z_1^2 = -1$, que nos da dos soluciones complejas $z_1 = \pm i$. Al variar los parámetros α , encontraremos todos los puntos del plano complejo salvo el origen $(0,0)$. Los espacios puntuales resultantes son de dimensión cero alojados en un espacio unidimensional complejo (aunque de dos dimensiones reales).

Cosas más interesantes ocurren cuando avanzamos a mayores dimensiones. Si tomamos los triángulos de la figura 6 que generan politopos reflectivos, encontramos antes la familia de polinomios especulares de Laurent para cada uno de ellos. Para el primer triángulo dimos un polinomio de dos variables y cuatro monomios mientras que para el segundo apareció un polinomio de dos variables y 10 monomios. Al igualar a cero estos polinomios nos darán espacios complejos de tres dimensiones, equivalentes a seis dimensiones reales. Igualando a cero los mencionados polinomios, tenemos:

$$\alpha_1 z_1^{-1} z_2^2 + \alpha_2 z_1^{-1} z_2^1 + \alpha_3 z_2^1 + \alpha_4 z_1^{-1} + \alpha_5 + \alpha_6 z_1^1 + \alpha_7 z_1^{-1} z_2^{-1} + \alpha_8 z_2^{-1} + \alpha_9 z_1^1 z_2^{-1} + \alpha_{10} z_1^2 z_2^{-1} = 0$$

$$\alpha_{-1} z_1^{-1} + \alpha_0 z_1^0 + \alpha_1 z_1^1 = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por $z_1 z_2$ y la segunda por $\omega_1 \omega_2$ (suponiendo que ninguno de los factores sea cero), encontramos:

$$\alpha_{10}z_1^3 + \alpha_1z_2^3 + \alpha_6z_1^2z_2 + \alpha_3z_1z_2^2 + \alpha_9z_1^2 + \alpha_2z_2^2 + \alpha_5z_1z_2 + \alpha_8z_1 + \alpha_4z_2 + \alpha_7 = 0, \text{ y}$$

$$\beta_1 + \beta_2\omega_1\omega_2^2 + \beta_3\omega_1\omega_2 + \beta_4\omega_1^2\omega_2 = 0.$$

La primera ecuación es una cúbica general en dos variables complejas, cuyo gráfico no es representable en el plano, pero que si nos restringimos a dos variables reales podríamos ver su gráfico como una curva en el plano. La segunda ecuación es también cúbica y conforma una subfamilia de espacios según se escojan los parámetros β . Al igual que la primera ecuación al restringirnos a variable real y parámetros también reales, invariablemente encontraremos curvas en el plano conocidas como curvas cúbicas. Si escogemos los betas que eliminen los monomios cúbicos y los restantes igual a 1, encontramos la curva $y = -1/x$. Esta curva es una hipérbola equilátera.

8 – Física para una nueva concepción del universo. Los años ochentas del siglo pasado fueron de mucha excitación en el mundo de la física por la aparición de la teoría de cuerdas que concebía el espacio físico con diez dimensiones. Shing-Tung Yau ya había probado la conjetura de Calabi a mediados de la década de 1970 y era ya una autoridad en espacios o variedades de Calabi-Yau. La conjetura de Calabi, en términos físicos, pregunta por la existencia de espacios compactos con supersimetría que, aunque no tengan materia, puedan tener gravedad. La teoría clásica de la relatividad determina que es la materia la que origina la gravedad y determina la curvatura del espacio, por lo tanto es de esperarse que en el vacío la gravedad sea cero, sin embargo después de muchas peripecias, Yau demostró que tales espacios eran posibles y que no sólo existía uno sino muchos y posiblemente infinitos. Estos son los espacios hoy conocidos como Calabi-Yau. Ejemplos de ellos se pueden originar a través del procedimiento descrito, como es el caso de variedades de tres dobles correspondiente a la familia de espacios derivados del politopo con vértices en (1,0,0,0); (0,1,1,1); (0,0,1,0); (0,0,0,1) y (-1,-1,-1,-1) que describe el polinomio:

$$z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 + 1 = 0.$$

Este polinomio de cinco variables genera una superficie en el espacio tridimensional complejo (o seis dimensiones reales) que puede apreciarse cuando se secciona para graficarlo en el espacio tridimensional que podría verse como en la figura 10. Estas superficies son compactas, tienen supersimetría y las seis dimensiones que propone la teoría de cuerdas.

Los procedimientos para obtener espacios de Calabi-Yau, seguidos aquí son muy conocidos, pero no son los únicos. Hay otras maneras de llegar a ellos pero no tan elementales como los que aquí hemos expuesto. Para bibliografía conducente a una profundización en estos temas ver el artículo citado en la nota 3.

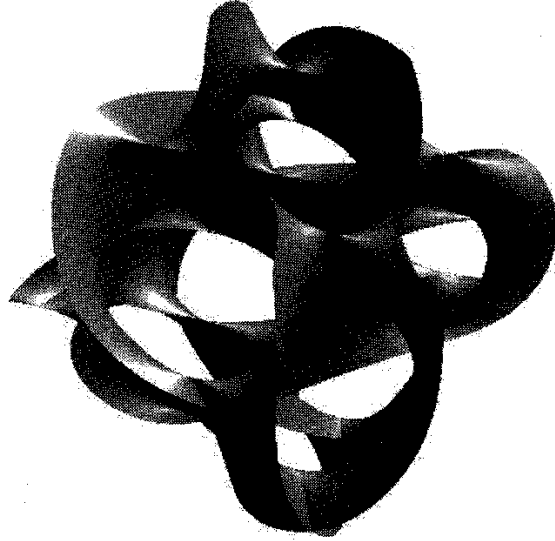


Figura 10. Aunque esta variedad de Calabi-Yau es de dimensión 6, podemos apreciar la complejidad de su estructura mirando sólo la proyección en 3D que muestra la gráfica¹⁴.

Aun la teoría de cuerdas no ha podido comprobarse como cierta a través de la experimentación, pero su desarrollo en los últimos treinta años ha servido a los matemáticos como acicate para profundizar y descubrir ricas vetas de nuevos conocimientos en áreas como geometría algebraica, geometría diferencial y topología, principalmente. Se puede apreciar, por ejemplo, la importancia de estas líneas de investigación al observar el listado de medallistas Fields relacionados con estas tres áreas de las matemáticas mostrado en la tabla de la figura 11.

En el trasfondo de esta exposición se dibuja la geometría en su amplio espectro, desde la geometría de Euclides hasta la geometría cuántica de los espacios de Calabi-Yau que presuponemos será la geometría dominante del próximo futuro. Esa nueva geometría albergará la física en escalas de Planck donde gravitan las partículas elementales y la relatividad general de los grandes cuerpos celestes.

¹⁴ Esta y otras gráficas son tomadas de: Doran, C. F. et al. *Op. Cit.* en la nota 3.

1.	1936	<u>Ahlfors, Lars</u> .	Finlandia.	Superficies de Riemann
2.	1954	<u>Kodaira Kunihiko</u> .	Japón.	Geometría Algebraica
3.	1954	<u>Serre, Jean-Pierre</u> .	Francia.	topología Algebraica
4.	1958	<u>Thom, René</u> .	Francia.	Topología
5.	1962	<u>Milnor, John</u> .	U.S. A.	Topología Diferencial
6.	1966	<u>Atiyah, Michael</u> .	Reino Unido.	Topología
7.	1966	<u>Grothendieck, Alexandre</u> .	Alemania.	Geometría Algebraica.
8.	1966	<u>Smale, Stephen</u> .	U.S. A.	Topología.
9.	1970	<u>Hironaka, Yamaguchi</u> .	Japón.	Geometría Algebraica.
10.	1970	<u>Novikov, Sergey</u> .	Rusia.	Topología.
11.	1974	<u>Mumford, David</u> .	Reino Unido.	Geometría.
12.	1978	<u>Deligne, Pierre</u> .	Bélgica.	Geometría Algebraica.
13.	1978	<u>Quillen, Daniel</u> .	U.S. A.	K-Teoría Algebraica.
14.	1983	<u>Thurston, William</u> .	U.S. A.	Topología.
15.	1983	<u>Yau, Shing-Tung</u> .	China,	Geometría Diferencial.
16.	1986	<u>Donaldson, Simon</u> .	Reino Unido.	Topología .
17.	1986	<u>Freedman, Michael</u> .	U.S. A.	Conjetura de Poincaré.
18.	1990	<u>Drinfeld, Vladimir</u> .	Rusia.	Geometría Algebraica.
19.	1990	<u>Mori, Shigefumi</u> .	Japón.	Geometría Algebraica.
20.	1990	<u>Witten, Edward</u> .	U.S. A.	Teoría de Supercuerdas.
21.	2002	<u>Voevodsky, Vladimir</u> .	Rusia.	Geometría Algebraica.
22.	2006	<u>Perelman, Grigori</u> .	Rusia,	Geometría .
23.	2010	<u>Ngo Bao Chau</u> .	Vietnam.	Geometría Algebraica.
❖ Total: 23 Medallas Fields.				

Figura 12. Listado de Medallistas Fields en campos relacionados con el tema que nos ocupa. Shing-Tung Yau y Edward Witten, trabajan actualmente en la interrelación de la geometría con la teoría de cuerdas. Grigori Perelman obtuvo la medalla por la prueba de la Conjetura de Poincaré.

Armenia, Colombia, Abril de 2013.