Matemáticas y Humanismo

Diego Pareja Heredia.

Febrero 2007

Reflexiones en torno a la Conjetura de Poincaré.

Después del gran despliegue periodístico hecho en el 2006 relacionado con la prueba de la conjetura de Poincaré y de su principal protagonista, el ruso Grigori Perelman, nos queda el compromiso de analizar más sosegadamente la interpretación y las implicaciones epistemológicas, que de tal resultado se derivan.

La conjetura de Poincaré tiene que ver con la clasificación de variedades de dimensión tres. Las variedades son ciertos objetos topológicos introducidos por Bernhard Riemann (1826-1866). Ejemplos simples son, la circunferencia, y la esfera hueca, en el espacio tridimensional conocida como *2-esfera*. Ejemplos más sofisticados son, la superficie de un toro, o la cinta de Möbius. Técnicamente, se entiende por variedad n-dimensional, un espacio de Hausdorff, segundo contable, para el cual, toda vecindad de un punto en la variedad, es homeomórfica a una n-esfera abierta del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$. Las variedades n-dimensionales, aunque son objetos del espacio de dimensión n + 1, se asemejan localmente a esferas del espacio n-dimensional, lo que indica que se puede "mapear" partes de la variedad en el espacio de dimensión n. Se sigue que la geometría de la variedad se puede conocer siempre que conozcamos la aplicación que origina los correspondientes mapas de la variedad en $\mathbf{R}^n$.

¿Puede toda variedad *simplemente conexa* de dimensión tres, deformarse continuamente hasta convertirse en una 3-esfera? Esta fue la pregunta que se hizo Poincaré en 1904. El matemático francés conjeturó que la respuesta debía ser afirmativa. La 3-esfera sería la contraparte en cuatro dimensiones de la 2-esfera. Nuestra mente no llega a formarse una idea de cómo podría ser una 3-esfera; sólo podemos concebirla como el resultado de tomar una esfera sólida en donde su superficie se funde en un punto inidentificable de la misma 3-esfera. Esta es una analogía del modo como logramos la 2-esfera "encocando" un círculo, hasta que la circunferencia que lo limita desaparece en un punto (digamos por ejemplo, en el polo norte).

Las inquietudes filosóficas que se derivan de la conjetura de Poincaré son variadas e importantes. En esencia, la conclusión de la famosa conjetura, induce a creer que el hombre puede conocer características fundamentales del mundo en que vive sin salir de él. Suponer que habitamos un espacio de tres dimensiones no significa que como seres específicos lo copemos todo, en el sentido de que lo podamos recorrer hasta sus confines más remotos. Es nuestra imaginación, la que nos permite considerar esa hipótesis. Hay limitaciones insalvables que nos sujetan a nuestro mundo. La gravedad, entre ellas, nos fija a la tierra; y otras como las condiciones propias del espacio exterior tan diferentes al medio en que vivimos, no permiten que salgamos libremente del encierro terrestre en que estamos. A pesar de esas limitaciones y de no haber salido de la superficie de la tierra, el hombre llegó a la conclusión, por ejemplo, de que la tierra en que vivimos, es redonda.

El descubrimiento de América, un hecho trascendental en la historia humana, estuvo a medio camino en la confirmación de que la tierra era redonda. Creemos que el mismo Colón murió sin la evidencia concreta de que nuestro planeta tuviera forma esférica. Cuando se circunnavegó la tierra por primera vez, se acopió una evidencia mayor que sugería la redondez de la tierra. Pero aun así, la tierra, sin ya ser plana, podía tener forma toroidal (como rosquilla) y circunnavegarla podría hacerse en dos formas distintas: o siguiendo la dirección longitudinal, o de otro modo, siguiendo la dirección transversal. Lo que en últimas comprobó la redondez del planeta fue su estudio geométrico y cartográfico. En el aspecto geométrico, los antiguos griegos, particularmente Eratóstenes y Aristarco habían mostrado que la tierra tenía forma esférica. Hubo que esperar hasta el siglo XVI, para encontrar proyecciones como la de Mercator que permitieron ver la superficie esférica de la tierra en forma de mapas o atlas, donde la curvada superficie de la tierra aparecería en forma plana y de allí concluir que todo el planeta, ahora sí redondo, quedaba cartografiado.

Llegar a conocer la forma de nuestro mundo desde una perspectiva local, no puede subestimarse. En tiempos modernos basta mirar desde las alturas de un jet intercontinental la superficie terrestre, para cerciorarse de la redondez de la tierra al descubrir la curvatura del horizonte. Sin embargo, las culturas que nos antecedieron no tuvieron la misma perspectiva. Su intuición primaria los inducía a creer que la tierra era plana.

En la respuesta a la pregunta, dónde estamos, va implícita la solución a la conjetura de Poincaré. Al observar un caracol deslizarse sobre el piso, notamos que sus desplazamientos están limitados a dos dimensiones: adelante-atrás y derecha e izquierda. El hecho de que el caracol suba y baje de un árbol no significa que cubra otra dimensión, sólo muestra que la superficie que habita se curva, pero igual, sigue siendo una superficie. Esa apreciación de la superficie donde el caracol se mueve, la obtenemos porque nuestra mente se acostumbró al manejo de tres dimensiones, y claro, uno percibe "desde afuera" las dos dimensiones de la superficie en cuestión. Como habitantes de un mundo tridimensional, nos podemos mover con tres grados de libertad: adelante-atrás, derecha-izquierda y arriba-abajo. El caracol, solamente tiene dos grados de libertad. Entonces, aquí viene la pregunta ¿Qué forma tiene el mundo que habitamos, habida cuenta que somos solo parte de un espacio mayor de cuatro dimensiones?

Al estar impedidos para abandonar nuestro mundo de tres dimensiones, no podemos "ver" nuestro propio universo, desde afuera, digamos, desde un espacio de más de tres dimensiones. Para Poincaré era posible estudiar, desde adentro, la estructura de nuestro universo para hallar ciertas pautas que caracterizaran su forma. Con los trabajos de Perelman, como fichas claves para resolver el rompecabezas, la mayoría de los matemáticos especializados en topología y que han leído la obra del autor ruso, creen que la conjetura tiene una respuesta positiva. No sobra decir, que hasta ahora, no conocemos la reacción de los físicos al respecto, para quienes el resultado de la conjetura tiene un peso enorme en la concepción del espacio físico, por cuanto los modelos que emplea la física en la interpretación del universo están ligados al enfoque del espacio-tiempo donde las variedades topológicas juegan un papel importante.

Volvamos al mundo del caracol. Desde fuera, uno ve claro que su mundo podría ser la corteza de la esfera o la superficie de un toro con uno o varios agujeros. En esas superficies como su universo, pueden perfectamente vivir en sus dos grados de libertad; deslizándose a lo largo y ancho de la superficie que le sirve de soporte. ¿Puede determinar el caracol desde su mundo, cuál es la forma del mismo, si ya conoce la geometría asociada con él? Para el caso de estas superficies, la respuesta es afirmativa. Análogamente, ¿Podemos nosotros, seres humanos, hacer lo mismo? Según la solución a la conjetura de Poincaré, la respuesta es también afirmativa.

Los trabajos de Perelman, hechos públicos en la Web en los años 2002 y 2003 dieron la clave, según los entendidos, para lograr la clasificación de las variedades de dimensión tres. Para entender qué es lo que caracteriza a una variedad simplemente conexa tomemos la analogía que Keith Devlin usa en su columna de la MAA [http://maa.org/devlin/devlin_12_06.html]. Supongamos que al salir de la tierra en una "nave espacial", llevamos atado un hilo a nuestra nave, de tal forma que al regresar a nuestro punto de partida, no necesariamente por la misma ruta, al hacer una lazada con el hilo, ocurre una de las alternativas siguientes: o, al halar de un extremo del hilo, el lazo, degenera en un punto, o, por más que halemos, el hilo se queda atorado en uno o varios agujeros. Si se da el primer caso, el universo en que vivimos es análogo a la superficie de la 3-esfera. Si ocurre el segundo caso, nuestro universo debe tener uno o más agujeros, como ocurre en el caso de un toro. En el caso del caracol, si su huella, desde el punto de partida hasta el retorno, puede irse contrayendo sin romperse, hasta convertirse en un punto, el caracol puede afirmar que su mundo es análogo a la superficie de una esfera. En otro caso su mundo tendrá la forma de un toro con uno o varios agujeros. Superficies con esta propiedad se llaman, simplemente conexas. Lo que básicamente Perelman muestra es que, el procedimiento descrito puede extenderse para determinar, en principio, la forma de nuestro mundo tridimensional, sin salir necesariamente de él.

Para una descripción técnica y detallada de los métodos empleados para la solución de la conjetura de Poincaré, invitamos al lector a mirar la prueba, en el artículo de más de trescientas páginas, asequible a través de la red, "A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures: Application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow".

Varias Medallas Fields, han distinguido a matemáticos que han trabajado en la teoría que llevó a la prueba de la conjetura de Poincaré. Amén de Grisha Perelman, debemos nombrar a William P. Thurston (1982), Simon Donaldson y Michael Freedman (1986), Steve Smale (1966) y John Willard Milnor (1962). La teoría de Flujo de Ricci, que usó Perelman en sus trabajos para la demostración de la conjetura, fue creada por Richard Hamilton, hoy profesor de la Universidad de Columbia en Nueva York. La conjetura de Poincaré cobró mucha pantalla al ser incluida en la lista de los *Siete Problemas del Milenio* del Clay Mathematics Institute (para detalles ver: http://www.claymath.org/millennium/). Estos premios tienen una bonificación de un millón de dólares cada uno. Perelman rechazó la Medalla Fields y según se rumoraba en el Congreso Internacional de Matemáticos de Madrid, el verano pasado, el matemático ruso iba a rechazar también el millón de dólares del Instituto Clay. En eso tiene razón Perelman, las matemáticas no necesitan ni premios, ni honores para desarrollarse, sólo la pasión intensa de quien va en busca de una verdad para su ciencia.

Esta columna está proyectada para salir diez veces al año. Comentarios pueden enviarse a depehache@yahoo.es .