

5.3 – Paradoja de Aquiles y la Tortuga.

Las paradojas de Zenón, volvemos a insistir, van dirigidas principalmente contra el atomismo de Demócrito y la visión de Heráclito sobre el movimiento. Usando el hecho intuitivo de que el movimiento se puede dividir indefinidamente en tramos y el tiempo en fracciones cada vez más pequeñas, la paradoja de la tortuga lleva a la conclusión de que Aquiles, el héroe mítico griego, no logrará nunca, alcanzar a la tortuga que se desplaza delante de él.

El razonamiento que lleva a la anterior conclusión puede describirse como sigue. Supongamos que la tortuga en un instante dado está a una distancia determinada delante de Aquiles. Supongamos además que, Aquiles corre diez veces más rápido que la tortuga. Cuando Aquiles llega al punto donde estaba la tortuga, ésta se habrá desplazado una décima parte del recorrido hecho por Aquiles. Cuando el héroe llegue a ese punto, la tortuga ya no está allí, se ha desplazado una centésima parte delante de Aquiles. Así la tortuga siempre estará delante de Aquiles y nunca podrá ser alcanzada. La conclusión es contra evidente, pero el razonamiento es válido, siempre y cuando supongamos que el tiempo y el espacio se pueden dividir indefinidamente. Claro está que a la luz de la experiencia, la conclusión del argumento no tiene sentido, por cuanto que, de hecho, Aquiles alcanza a la tortuga, si la velocidad del primero es mayor que la velocidad de la segunda como lo demuestra la experiencia.

La situación puede visualizarse mirando el recorrido de Aquiles antes de alcanzar a la tortuga. Tomemos por caso que Aquiles está 100 metros detrás de la tortuga, y que éste corre diez veces más rápido. Digamos, mientras la tortuga recorre un metro, Aquiles corre diez metros. Cuando Aquiles recorre los primeros cien metros, la tortuga está diez metros adelante; cuando éste recorre esos diez metros, la tortuga está un metro adelante. De allí en adelante la tortuga estará 0.1, 0.01, 0.001, etc. metros delante de Aquiles sin que éste pueda darle alcance. A la luz del cálculo infinitesimal la paradoja desaparece, pues como lo mostraremos en seguida, el tiempo T , necesario para sobrepasar a la tortuga es finito, se puede calcular y su valor dependerá de las velocidades de los dos corredores.

Sea S la distancia inicial que separa a Aquiles de la tortuga al momento de la partida. Sea v la velocidad de la tortuga y mv la velocidad de Aquiles, con $m > 1$. Consideremos las dos particiones:

$$P = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = T\}, \quad Q = \{S = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = 0\}$$

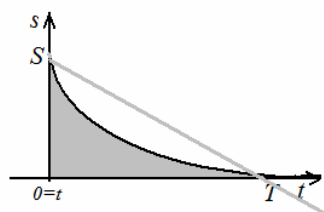


Fig. 5.4.1. Cuando el tiempo $t = 0$, la distancia entre Aquiles y la tortuga es S . Siendo la velocidad constante la distancia s va disminuyendo linealmente hasta cuando $t = T$, momento en el cual, la tortuga es sobrepasada por Aquiles. Si la velocidad de Aquiles decreciera, la situación podría ser como lo señala la curva en la región sombreada.

La primera, asociada al intervalo $[0, T]$ en que varía el tiempo, y la segunda, asociada al intervalo $[0, S]$ en que se mueve la distancia que separa a Aquiles de la tortuga. Una partición, es un conjunto de puntos del intervalo que determina una serie de subintervalos interiores. En el

momento de la partida, $t_o = 0$ y la separación es S ; y cuando la tortuga es sobrepasada por Aquiles, $t_n = T$ y $s_n = 0$ (Fig. 5.4.1).

Según nos indica la física elemental: espacio es igual a velocidad por tiempo. El espacio recorrido por la tortuga es vt , y el espacio recorrido por Aquiles es mtv , en el tiempo t . Sea $s(t)$ la separación entre Aquiles y la tortuga en el tiempo t . Ésta separación puede expresarse como:

$$s(t) = (S + tv) - mtv = S + (1 - m)tv$$

Donde $S + tv$ es la posición de la tortuga, y mtv es la posición de Aquiles en el tiempo t .

Considere $s_k = S + (1 - m)t_k v$, la separación entre Aquiles y la tortuga cuando $t = t_k$. Por lo tanto el incremento en la separación entre ellos, en el intervalo de tiempo (t_{k-1}, t_k) , será:

$$\Delta s_k = S + (1 - m)t_k v - (S + (1 - m)t_{k-1} v) = (1 - m)(t_k - t_{k-1})v = (1 - m)v \Delta t_k \quad (1)$$

Donde $\Delta t_k = (t_k - t_{k-1})$ es el tiempo cuando la separación pasa de s_{k-1} a s_k .

Despejando Δt_k en (1) tenemos:

$$\Delta t_k = \Delta s_k / (1 - m)v \quad (2)$$

A medida que las particiones se refinan, es decir, a medida que se introducen más y más puntos, y haciendo tender n a infinito, hallamos los diferenciales dt y ds . Esto es,

$$\Delta t_k \rightarrow dt, \quad \text{y} \quad \Delta s_k \rightarrow ds$$

y (2) se convierte en

$$dt = ds / (1 - m)v \quad (3)$$

Donde dt y ds son los diferenciales de las variables t y s respectivamente. Puesto que suponemos continuidad mientras el tiempo recorre el intervalo $[0, T]$ y s recorre $[S, 0]$ podemos integrar según Riemann a lado y lado en (3) y en los intervalos dados, para encontrar que:

$$T = \int_0^T dt = \int_S^0 ds / (1 - m)v = - [1 / (1 - m)v] \int_0^S ds = S / (m - 1)v$$

Así: $T = [S / (m - 1)]v$.

Cuando la separación inicial S , es por ejemplo, 100 metros, $m = 100$ y la velocidad de la tortuga es 0.1 mts/seg, el tiempo que necesita Aquiles para alcanzar a la tortuga es

$$T = [100\text{mts} / (100 - 1)](0.1 \text{ mts/seg}) = [100/99(0.1)] \text{ seg.} = 10.980 \text{ seg.}$$

El anterior análisis nos condujo a hallar el tiempo en que Aquiles alcanza a la tortuga, usando la argumentación propia de Zenón en el sentido de que el tiempo y el espacio se pueden dividir indefinidamente. Con el resultado encontrado ya tenemos el convencimiento de que la paradoja pierde su carácter de tal. El cálculo infinitesimal maneja cantidades infinitamente pequeñas, con las que Zenón y sus contemporáneos no estaban familiarizados. Así pues, con la invención del

cálculo, debida a Newton y Leibniz en el siglo XVII, esta interesante paradoja se logró aclarar en el plano matemático.

Si el problema se enfoca directamente a la luz de la física de Galileo y Newton, más específicamente, usando la *cinemática* – la teoría relacionada con el movimiento uniforme de un móvil – y teniendo en cuenta las definiciones dadas arriba, la separación de Aquiles y la tortuga en el tiempo t es:

$$s(t) = (S + tv) - mtv = S + (1 - m)tv$$

Donde s , t , y v , son respectivamente: la separación de Aquiles y la tortuga, el tiempo y la velocidad de la tortuga.

Llamemos T , al tiempo transcurrido hasta que Aquiles alcanza a la tortuga, esto es cuando $s(T) = 0$. En este caso,

$$s(T) = S + (1 - m)Tv = 0.$$

O sea, $T = [S / (m - 1)] v$.

Que coincide con la fórmula encontrada usando el cálculo infinitesimal.

Otras interesantes paradojas de Zenón se quedan sin analizar en detalle aquí, como es el caso de *la paradoja de la flecha*. Ésta, al igual que la anterior, involucra el movimiento y la teoría atomista de que el espacio se compone de partes indivisibles y de que el tiempo es la suma de instantes. En pocas palabras, según Zenón la flecha no se mueve porque en cada instante la flecha en vuelo no se distingue de una flecha en reposo, o sea, estará en reposo en cada instante y así el movimiento es imposible.

La paradoja de la flecha parte de la hipótesis de que el espacio y el tiempo son *atómicos*, para llegar después de una argumentación lógica, aparentemente válida, a un resultado obviamente falso. En contraste; en las paradojas de *la dicotomía* y *de Aquiles y la tortuga*, Zenón toma la posición opuesta, supone que el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles para llegar, después de una argumentación lógica, a situaciones contraevidentes como que, el corredor no puede llegar a la meta o que Aquiles no logra alcanzar a la tortuga. Es claro que si una cadena argumentativa, lógicamente correcta, que parte de una hipótesis, nos lleva a una contradicción, debe ser porque nuestra hipótesis inicial fue falsa. Este es el principio lógico conocido como *prueba por contradicción*, o en la lógica clásica, conocido como *método de prueba por reducción al absurdo*[Ver el final de esta sección].

Volvamos al punto inicial de esta exposición, Parménides no acepta en su cosmología o visión del universo, ni el movimiento, ni la multiplicidad desde el punto de vista ontológico. Para él y su discípulo Zenón, el cosmos era uno, indivisible y en eterno estatismo, para ellos el movimiento es sólo ilusión de los sentidos. Aunque las conclusiones a que conducen los argumentos de Zenón, no concuerdan con la realidad, sus contemporáneos no estaban en condiciones de descubrir en donde residía la falacia argumentativa. Pero aún así, el método dialéctico impulsado por Parménides, Zenón y luego por Sócrates, Platón y Aristóteles, aplicado a la teoría del conocimiento ha mostrado gran utilidad en la búsqueda de la verdad. En matemáticas el método dialéctico aplicado a la prueba de teoremas es muy valioso, a tal punto que David Hilbert aseveraba que prescindir de este método de prueba, era similar a que un boxeador en la pelea, dejara de lado, el uso de sus puños. También se debe tener en cuenta que el método dialéctico cuando no es bien manejado puede conducir a conclusiones erradas. El mismo Platón, a través de sus diálogos, nos alerta sobre el problema que puede generar una argumentación dialéctica mal encaminada.

El método dialéctico¹ muy afín a la escuela eleática, tuvo a Protágoras (el mismo del aforismo, *El hombre es la medida de todas las cosas*), como el primer sofista, y también como uno de sus grandes abanderados. Sócrates fue el más distinguido de todos los sofistas, aunque él, fue más allá, al reconocer modesta y honestamente que su método era, el del verdadero filósofo, la búsqueda de la verdad.

La lógica de los antiguos griegos, realmente tuvo dos vertientes muy importantes. La liderada por Aristóteles y aquella que preconizó la escuela estoica. Sus enfoques en la teoría de la argumentación, fueron distintos. Los estoicos se adherieron al método dialéctico a tal punto que estaban dispuestos hasta el dolor y el sufrimiento para cumplir los lineamientos de su doctrina. Es de aquí de donde deriva la palabra *estoicismo*, que significa en el lenguaje usual, *fortaleza ante las adversidades*. Los patrones de razonamiento derivados de la lógica de los estoicos son patrones o modelos de interconexión proposicional independientes del contenido semántico de las proposiciones involucradas. La argumentación de Aristóteles por el contrario se basa en el poder del silogismo.

En general, la lógica busca describir los patrones, en los cuales las proposiciones se combinan para producir argumentos válidos. Estos patrones para el caso de los estoicos están conformados con ayuda de los conectivos lógicos: conjunción (\wedge), disyunción (\vee), implicación (\Rightarrow), negación (\neg) y equivalencia (\Leftrightarrow). Con el supuesto de que las proposiciones son: o verdaderas o falsas, a la vista de la lógica actual, éstas conforman, toda un algebra de proposiciones. Con los conectivos obtenemos nuevas proposiciones, cuyo valor de verdad coincide con las tablas de verdad que hoy usamos en el cálculo proposicional. Específicamente, para el caso de la conjunción el resultado es: si las proposiciones son ambas verdaderas, también lo es su conjunción. En otro caso la conjunción no es válida. Similarmente para los otros conectivos lógicos, existen sus respectivas tablas de verdad.

Las reglas comunes de deducción o reglas de inferencia que heredamos de los griegos las podemos esquematizar en la siguiente tabla:

<i>Modus tollendo ponens</i>	<i>Modus ponendo ponens</i>	<i>Modus tollendo tollens</i>	<i>Prueba por casos</i>
$p \vee q$ $\neg p$ <hr/> q	$p \Rightarrow r$ p <hr/> r	$p \Rightarrow q$ $\neg q$ <hr/> $\neg p$	$p \Rightarrow r$ $q \Rightarrow r$ <hr/> $(p \vee q) \Rightarrow r$

También heredamos ciertas leyes o principios básicos de la lógica como:

<i>Principio de no contradicción</i>	<i>Principio del tercero excluido</i>	<i>Principio de identidad</i>	<i>Prueba por contradicción</i>
$\neg(p \wedge \neg p)$	$p \vee \neg p$	$p \Leftrightarrow p$	$p \Rightarrow (r \wedge \neg r) \Rightarrow \neg p$

Siguiente Sección: Paradoja de Banach Tarski

¹ Ver: Popper, K. R. *Conjeturas y Refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico*. Paidós. Barcelona. 1983, Págs. 375 y sigts. Popper, K. R. *The Open Society and its Enemies*. Vol. I. Princeton University Press. 1971. Pág. 171 y sigts.