"*Particula in minima micat integer orbis*", (En la mínima partícula, se encuentra reflejado el universo entero). G. W. Leibniz.

4.6 La contribución de Leibniz al cálculo infinitesimal.

En los siguientes términos se expresa el filósofo español Julián Marías [1] con respecto a Leibniz:

> "Vean ustedes como es la amplitud de una figura extraordinaria: (Leibniz) es quizá el último hombre en Europa capaz de poseer el universo de las ciencias. Después, esto no ha sido posible, por la especialización, por el crecimiento de la información... Y actualmente se llega hasta el extremo de que los científicos no conocen la disciplina que profesan, sino conocen una pequeña parcela de ella: un botánico que está especializado en las algas o en determinada variedad de algas y nada más, no sabe mucho de lo demás. Y lo mismo ocurre con el físico, con el químico, con todos los científicos. Hay una parcelación del saber que impide la visión universal que posee todavía Leibniz."
>
> "¿Es esto posible? ¿Es necesaria esa visión de conjunto, la visión abarcadora del real? Ustedes piensen que la crisis de la filosofía en estos últimos decenios, que es muy grande – lo que se llama filosofía, muchas veces, tiene muy poco que ver con ella – consiste precisamente en un abandono de la perspectiva filosófica, del punto de vista filosófico. El filósofo, no sabe casi nada sobre casi todo, pero tiene el punto de vista filosófico: él se pregunta sobre la realidad y por el puesto que cada cosa, cada parroquial realidad, tiene en el conjunto de la realidad. En esto consiste la filosofía y por esto siempre insisto en que se trata de hacer, las preguntas radicales: … las respuestas son inseguras, no son necesarias, a veces no se encuentran... pero si se hacen las preguntas radicales, se está haciendo filosofía; si no se hacen esas preguntas –hágase lo que se haga – se está fuera de la filosofía. Y es interesante ver como el exceso de crítica que aparece ya después de Leibniz, justamente consiste en una serie de renuncias... Renuncias que van a estar de cierto modo compensadas por lo contrario: por excesos."[2]

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig en 1646 y murió en Hannover en 1716. Su universalismo, como lo dice Julián Marías, es aun más meritorio si se tiene en cuenta que Leibniz vivió y se destacó en una época de científicos tan importantes como Johann Kepler, Blas Pascal, René Descartes, Pierre de Fermat, Galileo Galilei, Isaac Newton y Christian Huygens. Después de terminar sus estudios a edad muy temprana, se podía decir de él que, era ya, todo un académico. Sin embargo, fue después de terminar la universidad que empezó a complementar sus conocimientos con el estudio de las matemáticas. Para él, la geometría de Euclides era un misterio y la geometría de Descartes le parecía ininteligible. No obstante, pasados algunos años logró ser un experto, no sólo en geometría, sino en todo el amplio espectro de las matemáticas de su tiempo. Más aun, contribuyó al enriquecimiento de las matemáticas con sus propios aportes, sobre todo al recién inventado, cálculo infinitesimal, nombre, que entre otras cosas, se debe a él, pues para Newton, era la teoría de las fluxiones y de las cuadraturas.

El ser abogado de profesión y diplomático de carrera, le permitió entrar en contacto con las esferas más altas de la sociedad de la antigua Prusia, de la sociedad francesa de Luís XIV, conocido como el

---

[1] **Julián Marías Aguilera** (1914 - 2005), filósofo de la Universidad de Madrid, y el discípulo más destacado de Ortega y Gasset. Ensayista y distinguido filósofo. No enseñó en las universidades españolas en el tiempo de Franco por discrepancias ideológicas, pero fue conferenciante en numerosos países de Europa y América y profesor en varias universidades de Estados Unidos. Su presencia en el mundo intelectual español ha sido constante: colaborador de las publicaciones más relevantes, fue miembro de la Real Academia desde 1964 y senador por designación real entre 1977 y 1979. En 1996 se le concedió el Premio Príncipe de Asturias de Comunicación y Humanidades. Tomado de Wikipedia.

[2] MARÍAS, J. "*Los estilos de la Filosofía*", Madrid, 1999/2000 - edición: Jean Lauand. Conferencia tomada de Internet.

Rey Sol, y de la flemática sociedad londinense, que lo acogió como uno más de los miembros de la Royal Society de Londres. En su obra *De Arte Combinatoria* (Sobre el arte de las combinaciones) de 1666, hace de la igualdad de conceptos un objeto de análisis. Entre las propiedades que se desprenden de sus estudios están las siguientes:

REFLEXIVIDAD. Si A es un concepto, entonces A = A.
SIMETRIA. Para conceptos A y B, si A = B, entonces B = A.
TRANSITIVIDAD. Para conceptos A, B y C, si A = B y B = C, entonces A = C.

En esta misma obra dedica bastante espacio al estudio de las sucesiones y las series y hace un estudio sistemático de las propiedades de las combinaciones y permutaciones. Alrededor del año 1672, trabajaba sobre las diferencias sucesivas de progresiones aritméticas del tipo, a_0, a_1, a_2,…, a_n. Observó que las diferencias sucesivas de los términos: d_1, d_2, … , d_n, definidas por: $d_i = a_i - a_{i-1}$, cumplían la siguiente propiedad:

$\sum_{i=1}^{n} d_i = (a_1 - a_o) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_o$. Una serie de este tipo, hoy se conoce como serie telescópica.

Se sigue de aquí que la suma de las diferencias de una sucesión es la diferencia entre el primero y el último término de la progresión. De esta elemental propiedad, Leibniz encuentra todas las propiedades que los *pitagóricos* hallaron a través del álgebra geométrica, como son la suma de los números impares, de los pares, de los cuadrados, etc. Y va más allá cuando extiende la propiedad a sumas infinitas, al encontrar que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = a_1$$

Donde la sucesión b_i es decreciente y está definida por $b_i = (a_i - a_{i+1})$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

París fue su mayor experiencia. Allí recibió la benéfica influencia del científico holandés Christian Huygens (1629-1695), quizá el científico más prestigioso de Europa por esa época, quien en una ocasión le puso como reto, el cálculo de la serie:

1 +1/3 +1/6 +1/10 +1/15 +1/21 + 1/28 +1/36 + 1/45 +….

Donde los sumandos son los inversos de los números triangulares, o sea, aquellos que resultan de la suma de los primeros naturales, en su orden 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, etc. Leibniz convierte esta serie en otra más digerible.

1 +1/3 +1/6 +1/10 +1/15 +1/21 +…

= 2[1/2 + 1/6 + 1/12 +1/20 +1/30 +1/42 +…]

= 2[(1- 1/2) + (1/2-1/3) + (1/3-1/4) + (1/4-1/5) + (1/5-1/6) +…]

= 2[1] = 2.

Esta serie se convierte en telescópica usando transformaciones simples. En efecto, la suma de los primeros k números naturales es, $k(k+1)/2$. Pero $1/[k\ (k+1)] = 1/k - 1/(k+1)$. A este resultado se llega usando fracciones parciales, tema común, cuando se trata de integrar funciones racionales. Usando la notación para series, la suma de Leibniz se reduce a:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 2\left[1 - \frac{1}{n+1}\right].$$

Como se vio arriba, Leibniz ya tenía la fórmula para calcular estas sucesiones decrecientes. Cuando $n \to \infty$, el miembro de la izquierda se convierte en una serie infinita y el miembro de la derecha va a 2(1) =2.

La serie anterior fue como un bautizo de ingreso para Leibniz al seno de las matemáticas. Fascinado con las series, siguió explorando su comportamiento y fue a través de ellas que llegó a inventar el cálculo.

En 1675, escribió un manuscrito donde el simbolismo $\int f(x)dx$ ya estaría presente y es la primera vez que esta notación aparece en imprenta. En el mismo artículo aparece la regla para la diferenciación de un producto de dos funciones. Para el año 1676, Leibniz había descubierto la fórmula; $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, para derivar una potencia donde el exponente podía ser entero o racional. Por esta época Newton y Leibniz se habían cruzado cartas en las que tocaban estos temas. Por esta razón Newton sospechó que Leibniz le estaba copiando sus métodos y resultados para publicarlos como propios. En una de estas cartas Leibniz describe a Newton la forma en la que él encuentra la derivada de una función compuesta, tema que para este tiempo ya lo había tratado Newton. La polémica sobre la prioridad del descubrimiento del cálculo tomó un cariz ácido al involucrar, tanto a seguidores de Newton como de Leibniz. Los dos contrincantes en esta polémica, eran figuras de gran relieve intelectual, quienes no se rebajarían a cometer plagio para ganar una fama inmerecida. El juicio de la historia parece concluir que las dos celebridades de las matemáticas, llegaron al descubrimiento del cálculo por sendas propias y por métodos distintos. Ya decíamos que Newton estaba clasificado entre los tres matemáticos mayores de la historia, y recordemos que Leibniz también es considerado uno de los más grandes lógicos que haya producido la humanidad, al lado de Aristóteles, Frege, Russell y Tarski.

Un mérito que exalta la personalidad científica de Leibniz es su capacidad de síntesis, al involucrar los ejemplos particulares en fórmulas generales, como igualmente lo hiciera Newton, con la probable ventaja de que, su notación, tanto para la diferencial como para la integral se universalizó dentro del lenguaje matemático. Pero no sólo fue el cálculo, la única aportación de Leibniz. También encontró curiosas propiedades en la teoría de números. Hizo un estudio detallado del *sistema binario* del cual dejó un escrito, *Essay d'une nouvelle science des nombres* (Ensayo sobre una ciencia moderna de los números) que es considerado como el primero en estos temas, trabajo que además fue presentado a la Academia de Ciencias de París. En este trabajo se introduce el sistema binario o de base dos, que permite expresar todos los números reales con sólo los dígitos {0, 1}. Leibniz estudió este sistema motivado en la interpretación del libro clásico de la filosofía taoísta, el *I Ching*[3], donde las unidades

[3] El *I Ching*, o, *Libro de las Mutaciones*, es la obra fundamental de la filosofía taoísta. Su origen se remonta al III milenio AC, y parte del libro, se atribuye al filósofo chino Confucio. Este libro se menciona en la historia de las matemáticas, en razón a que el más antiguo cuadrado mágico conocido, aparece aquí con el nombre de *Lo Shu*. La edición en idioma inglés más conocida es: *The I Ching, or Book of Changes.* Prologada por C. G. Jung, traducida del chino y comentada por Richard Wilhelm. La publicó Princeton University Press en 1967. Hay también edición en español publicada por Edhasa,

básicas que forman los exagramas son el *ying* y el *yang*. George Boole (1815-1864) desarrolló un *álgebra* que lleva su nombre, en la que el sistema binario de 0´s y 1´s, juega un papel importante. En el proceso de resolver sistemas de ecuaciones simultáneas, Leibniz encontró los determinantes, de los cuales hizo un estudio sistemático, el que, sin embargo, permaneció inédito por varios años. Entre las cosas curiosas en el álgebra elemental logradas por Leibniz es la extraña identidad: $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$, cuya prueba es un reto a los lectores que dicen conocer bien el álgebra de Baldor.

El proyecto de su vida fue la búsqueda de un lenguaje unificador o lenguaje simbólico para la lógica, que permitiera mecanizar, no sólo las operaciones aritméticas si no también los procesos racionales de la mente, y así ahorrarle a la misma mente, el esfuerzo y desgaste que implica la actividad repetitiva de las rutinas presentes en las operaciones aritméticas y en el logro de juicios acertados a partir de las premisas de una argumentación. Esa búsqueda de un lenguaje universal que simplifique procesos y que guíe a la mente, lo llevó a convertir su notación en el cálculo infinitesimal, como la simbología estándar en esa disciplina matemática. Para ilustrar la conveniencia de su notación, recordemos aquí, cómo expresa Leibniz en su notación, la regla de la cadena, que Newton había tratado.

Cuando $z = h(x) = f[g(x)]$, donde $y = g(x)$ ([4]), sabemos que $h´(x) = f´[g(x)]\, g´(x)$. En notación de Leibniz, esta última expresión se convierte en:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Una fórmula que a simple vista muestra su carácter evidente. La aparición del término *dy* en el miembro de la derecha de la igualdad, aunque obvio en apariencia, su significado en todo el proceso de diferenciación es muy importante. La versión de la regla de la cadena en el cálculo integral corresponde al proceso de integración por sustitución $\int f(g(x))g´(x)dx=\int f(u)du$. Donde la sustitución, $u=g(x)$, y, $du = g´(x)\,dx$, se ve casi obvia.

La concepción con que Leibniz se acerca al cálculo, es global, en el sentido de tratar las variaciones discretas de las variables geométricas como un todo, es decir, una curva está asociada en un punto específico, a su tangente, que a su vez, está ligada a una componente *dy* y a una componente *dx*, tomadas en relación a las variables *y* y *x* respectivamente, que la definen como el cociente diferencial $\frac{dy}{dx}$. Al contrario Newton se interesa en las fluxiones o cambios de las variables con respecto al tiempo, basado en la idea intuitiva del movimiento continuo. Como consecuencia de esto, la notación y la terminología de Leibniz soslaya el concepto de límite que se supone implícito en los procesos infinitesimales. En el caso de Newton el concepto de límite aparece claramente explicito, como lo hemos visto, tanto en las derivadas y cuadraturas como en el mismo método de aproximar raíces.

La integral de Newton es una integral indefinida; es un flujo determinado por una fluxión dada. Para Leibniz la integral es una suma infinita de diferenciales, representada explícitamente en su notación $\int f(x)dx$, donde el símbolo $\int$ corresponde a la distorsión de la letra *S*, como aparecía en imprenta en los libros de la época, y para el caso aquí, representaba una suma de infinitos términos.

Barcelona. Leibniz conoció esta obra por intermedio de un padre jesuita que trabajó muchos años en labores pastorales y de evangelización en la China.

[4] La notación funcional *y = f(x)* se originó en Lagrange.

Las inquietudes científicas de Leibniz fueron muy amplias. En una visita a la Royal Society de Londres llevó su máquina calculadora, que aunque incompleta, sería el primer acercamiento a la meta de lograr el cálculo aritmético en forma mecánica[5]. Al igual que Newton, Leibniz se interesó por la alquimia, por la física, sobre todo por la cinemática y la geología. Propuso el diseño de motobombas accionadas por energía eólica (producida por el viento) o movidas por energía hidráulica. En fin, su curiosidad científica e intelectual no tuvo límites. Estuvo ligado como miembro, o fundador, de las principales academias de Europa; empezando por la *Academia Ciencias de París*, siguiendo con la *Royal Society de Londres*, con la *Academia de San Petersburgo* y con la *Academia de Berlín*, de la que fue su fundador.

La siguiente tabla muestra el simbolismo y la terminología de Newton y Leibniz.

	Cálculo infinitesimal	**Integral**	**Derivada**	**Diferencial**
Newton	*Teoría de fluxiones y cuadraturas*	$\square f(x)$	$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ *cociente de fluxiones*	$\dot{x}$ *fluxión de x*
Leibniz	*Cálculo diferencial e integral*	$\int f(x)dx$	$\frac{dy}{dx}$ *cociente diferencial*	dx *Diferencial de x*

Gottfried Wilhelm Leibniz es considerado uno de los grandes lógicos en la historia de la humanidad. [6]

[5] Para una descripción de la máquina de Leibniz, ver mi artículo: *Breve Historia del Computador.* Matemática. Enseñanza Universitaria. No. 28. Noviembre. 1983.
[6] Foto tomada del libro, ya citado, de William Dunham: *The Mathematical Universe*, página 146.

4.7. Otra forma de ver el Cálculo Infinitesimal. El Análisis no Estándar.

Una de las críticas que aun se le hace a Euler es, su forma poco rigurosa de aproximarse al cálculo, sobretodo en el proceso de calcular límites. Sin embargo, hoy podemos decir que los resultados encontrados por él, pueden ser justificados, cuando éstos, se miran con la óptica de un enfoque reciente, conocido como *análisis no estándar*.

El rigor impuesto al cálculo, empezando por Cauchy y culminando con Weierstrass y sus seguidores, dejaba a los infinitesimales sin piso matemático alguno, a tal punto que con el arribo, del logicismo de Russell[7] y luego, de la Escuela Bourbaki, estos entes raros, fueron condenados al ostracismo matemático. Pero en la década de 1960, Abraham Robinson (1918-1974), usando la teoría de modelos, creo una extensión de los números reales, conocida como el conjunto de los *números reales no estándar*, notado por ***R****. Estos números nuevos, se denominan hiperreales y se definirán adelante. Robinson viene a reivindicar, particularmente a Newton, quien fue tan duramente atacado por el obispo George Berkeley (1685-1753), por proponer "*una teoría que usaba unos números que eran y no eran nulos*", o textualmente "fantasmas de cantidades desaparecidas", como se decía de los infinitesimales. Robinson publicó su obra central, *Non-standard Analysis* en 1966. Con este enfoque se puede lograr que los infinitesimales, sirvan de base para el desarrollo total del cálculo de Newton y Leibniz. Jerome Keisler de la Universidad de Wisconsin, uno de los alumnos más brillantes de Alfred Tarski en la Universidad de Berkeley, y su vez asesor de tesis de Sergio Fajardo, ex alcalde de Medellín, publicó un libro de cálculo con este enfoque como texto para estudiantes de pregrado[8] el que puede descargarse gratuitamente de la página:

http://www.math.wisc.edu/~keisler/.

El conjunto de los números reales es un cuerpo ordenado completo, es decir, se cumple el *axioma del extremo superior*, sin embargo el conjunto de los hiperreales ***R****, no lo es, pero sí, contiene como subcuerpo propio a ***R***. Describamos someramente algo de la axiomática de los hiperreales.

Axioma de extensión. Existe una extensión propia y ordenada ***R****, del cuerpo ***R*** de los números reales.

En esta extensión ***R****, definimos: ***i***) x como un *infinitesimal* en ***R****, si $|x| < r$, para todo real positivo r, ***ii***) x es *finito*, si $|x| < r$, para algún real positivo r, *y*, ***iii)*** x es *infinito*, si $|x| > r$, para todo real $r \in \boldsymbol{R}$. Se sigue de aquí que en ***R****, además de los números reales, hay infinitesimales y números infinitamente grandes, más grandes que cualquier número real dado. Estos hiperreales tienen su propio álgebra, entre cuyas propiedades están, por ejemplo que suma, resta y multiplicación de infinitesimales es nuevamente infinitesimal, o hablando algebraicamente, estas operaciones son cerradas en ***R****.

[7] Bertrand Russell, consideraba a los infinitesimales, como "innecesarios, erróneos y contradictorios", según lo menciona John L. Bell en su artículo *Infinitesimal and the Continuum*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 17 No. 2. Spring, 1995.
[8] KEISLER, H. Jerome**.** *Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals.* Prindle Weber & Schmidt. 1976.

También es un infinitesimal el recíproco de un número infinito. Sin embargo el producto de un infinitesimal y un número finito será un infinitesimal.

Dos hiperreales, x, y, se dicen *infinitamente cercanos*, notado, $x \approx y$, si su diferencia es un infinitesimal. De aquí se sigue que dado un hiperreal x hay infinitos hiperreales infinitamente cercanos a x. En el argot del análisis no estándar, este conjunto alrededor de x, se llama una *galaxia* centrada en x. En particular si x es real, todo y de su galaxia tiene la propiedad de que la parte estándar, $st(y)$, es x, simbólicamente, $x = st(y)$.

Axioma de función. Si f es una función de valor real, definida en un subconjunto de R^n, entonces a f está asociada una función de valor hiperreal f^*, de n hipervariables, que llamaremos, la *extensión natural de f*. Las operaciones en ***R****, son las extensiones naturales del cuerpo ***R***.

Axioma de solución. Si dos sistemas de fórmulas, tienen exactamente las mismas soluciones reales, entonces sus extensiones naturales, tienen exactamente las mismas soluciones hiperreales. Por ejemplo:

$$(X \cup Y)^* = X^* \cup Y^*, \quad (X \cap Y)^* = X^* \cap Y^*.$$

$$X \subset Y, \text{ si y sólo si, } X^* \subset Y^*.$$

Si X es un conjunto acotado de números reales, entonces, X* consiste de elementos hiperreales finitos. Si f es una función de valor real y variable real, entonces,

$$(\text{Dominio } f)^* = \text{Dominio } (f^*), \text{ y } (\text{Rango de } f)^* = \text{Rango de } f^*.$$

Si f y g son dos funciones de valor real definidas en un conjunto $D \subset \mathbf{R}$, con $f(x) \le g(x)$, para todo x en D, entonces las dos fórmulas, $f(x) = g(x)$ y $f(x) \le g(x)$, tienen el mismo conjunto de soluciones reales, es decir D y así las dos fórmulas, $f^*(x) = g^*(x)$ y $f^*(x) \le g^*(x)$, tienen el mismo conjunto solución D* en los hiperreales.

Ciertos procesos en el cálculo se simplifican, usando el análisis no estándar. Este es el caso de la definición de derivada. Específicamente, f es una función diferenciable en $a \in \boldsymbol{R}$, siempre que el cociente

$$\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

sea finito y tenga la misma parte estándar para cada infinitesimal no nulo, $\Delta x \approx 0$. Su derivada es

$$f'(a) = \mathrm{st}\left(\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right).$$

Para ejemplos de derivación e integración en cálculo no estándar, ver:

EDWARDS, C. H**.** *The Historical Development of Calculus.* Springer-Verlag. New York, 1979. Pág. 341 y siguientes.

Para conocer la teoría completa y aplicaciones del cálculo no estándar, visitar la página del profesor Keisler, antes citada.

Siguiente Sección: ***La Crisis de los Fundamentos. Las Paradojas de Zenón***